Digitale Bibliothek Braunschweig

"Ein eigentümlicher Zauber umgibt das Erkennen von Maß und Harmonie"

Zum historischen Verhältnis von Mathematik und Musik

Scriba, Christoph J.

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1990 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.115-152

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

„Ein eigentümlicher Zauber umgibt das Erkennen von Maß und Harmonie"

Zum historischen Verhältnis von Mathematik und Musik

Von **Christoph J. Scriba**

INHALTSVERZEICHNIS

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

1 Einleitung

Meine sehr verehrten Damen und Herren!

Der Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit ist einmal mit den folgenden Worten beschrieben worden:[1])

> Die wachsende Vorherrschaft der zergliedernden Kräfte des Verstandes über die einigenden Kräfte des Glaubens führten zu einer Lockerung der strengen Hierarchie aller Bereiche des Denkens, des Bewertens und des Lebens, die die geistige Welt des Mittelalters charakterisierte. Zugleich mit diesem Prozeß begannen sich die einzelnen Formen, mit denen der Mensch die Welt zu begreifen versucht, vom Gerüst ihrer umfassenden Organisation zu lösen und zur Autonomie hin zu entwickeln. Die starke Ausstrahlung der einzelnen Zweige des Wissens, die in Verbindung mit dieser Entwicklung am Beginn der Neuzeit stattfindet, wird erkauft um den Preis der Aufgabe der einheitlichen Orientierung des gesamten Wissens. Hatte früher in der gestuften Ordnung des geistigen Kosmos der Bezug zur Theologie jeder einzelnen Disziplin ihren unverwechselbaren Platz, ihre eindeutig bestimmte Position zugewiesen – und damit auch ihre festgelegten Grenzen –, so führte nun der Sieg der autonomen Bestrebungen, zusammen mit dem plötzlich einsetzenden Erstarken der einzelnen Wissenschaften, zu einem Verfall jener Weltsicht, die sie alle in einer einzigen Gesamtheit umfaßt hatte. Mit der möglichen Ausnahme von CUSANUS erscheinen die Männer, die das neue, für die Renaissance charakteristische Wissenschaftsideal verkörpern – Männer von universalem Geist in den Augen unserer heutigen Zeit – als hochgradige Spezialisten oder talentierte *virtuosi*, vergleicht man sie mit den großen Meistern des Mittelalters, mit AVERROES, MAIMONIDES, ALBERTUS und THOMAS.

Der eben verlesene Text ist dem Beginn eines Beitrags von Professor KLIBANSKY aus dem Jahre 1936 entnommen. Dieser Aufsatz erschien damals in englischer Sprache unter dem Titel „The Philosophic Character of History“ in der Festschrift „Philosophy and History“ für Ernst CASSIRER. Er war aber ursprünglich in deutscher Sprache abgefaßt worden. Ich mußte ihn also zurückübersetzen und hoffe, wenigstens annähernd sinngemäß wiedergegeben zu haben, was der Autor vor 55 Jahen sicher in viel eleganterem Deutsch niedergeschrieben hatte. Wie wir hörten, beschrieb er darin mit eindringlichen Worten den Prozeß der Auflösung eines einheitlichen Weltbildes „unter der wachsenden Vorherrschaft der zergliedernden Kräfte des Verstandes über die einigenden Kräfte des Glaubens“.

Ich bin weder Philosoph noch Allgemeinhistoriker und daher außerstande, mit der Herrn KLIBANSKY eigenen Universalität das angeschnittene Thema in umfassender und zugleich angemessener Weise zu behandeln. Ich kann als Mathematikhistoriker

Überarbeitete Fassung eines Vortrags, gehalten auf der Sitzung der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft in der Herzog August Bibliothek in Wolfenbüttel am 15. 6. 1990.

[1]) [KLIBANSKY 1936], S. 323 (Rück-Übersetzung ins Deutsche: C.J.S.).

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

lediglich den Versuch machen, an einem kleinen Ausschnitt aus der historischen Entwicklung naturwissenschaftlicher Betrachtungen zu verdeutlichen, wie die wachsende Vorherrschaft des analytischen Denkens den geschilderten Auflösungsprozeß in die Wege leitete.

Allerdings – das deutet schon das Zitat an, das ich meinem Thema vorangestellt habe – soll nicht allein von einem Auflösungsprozeß die Rede sein. Dem Verlust auf der einen Seite steht unzweifelhaft ein Gewinn auf der anderen gegenüber. Ich hoffe, auch das wenigstens skizzenhaft andeuten zu können.

2 Die Antike

2.1 Die Musiktheorie der Pythagoreer

„Mathematik und Musik": Dieses Thema führt uns unweigerlich zunächst zu den Pythagoreern. Denn PYTHAGORAS und seine Schüler waren es, die als erste den Zusammenhang zwischen wohlklingenden Akkorden und einfachen mathematischen Zahlenverhältnissen erkannten und auf dieser Erkenntnis ein imposantes Lehrgebäude, ja ein ganzes Weltbild errichteten.

Sie bedienten sich bei ihren akustischen Forschungen des Monochords, des mit einer Saite bespannten Versuchsgerätes, wobei sie mittels eines unter der Seite angebrachten, verschiebbaren Steges beliebige Saitenteilungen vornehmen konnten.[2)]

Zentrales Ergebnis der frühen pythagoreischen Forschungen, die teilweise noch auf PYTHAGORAS selbst zurückgehen mögen, war folgende Erkenntnis: Die heute als Oktave, Quinte und Quarte bezeichneten Intervalle sind durch die Längenverhältnisse 2:1, 3:2 und 4:3 gekennzeichnet. Dabei gehört die größere Zahl zum Grundton, die kleinere (also das kürzere Saitenstück) zum oberen Ton. Und weiter: Da Quinte und Quarte aneinandergesetzt gerade eine Oktave ergeben, sind offenbar diese Verhältnisse *multiplikativ* zusammenzusetzen:

$$(3:2)\cdot(4:3) = 2:1.$$

Diese letztere Tatsache war eine für die weitere mathematische Entwicklung, nicht zuletzt für die Entdeckung des Irrationalen, höchst bedeutsame Einsicht, auf deren Behandlung ich aber hier verzichten muß.[3)]

Nur die drei genannten Intervalle wurden von den frühen Pythagoreern als wohlklingendend oder verschmelzend bezeichnet. Daher gründete sich ihre mathematische Konstruktion der musikalischen Tonleiter allein auf diese drei Konsonanzen.

Ihre theoretische Konstruktion der Tonleiter entwickelten die Pythagoreer wohl in Anlehnung an die Praxis des Stimmens der acht Saiten der Lyra. Da deren Anordnung

[2)] Zur Mathematik und Musiktheorie der Pythagoreer siehe [SZABÓ 1969] und [v. d. WAERDEN 1979]. – Das Problem der Berechnung der Tonleiter in der Geschichte im allgemeinen wird behandelt von [DUPONT 1935] und [BARBOUR 1951]. – Einen kurzen Überblick über das historische Verhältnis von Mathematik und Musik enthält auch [RADBRUCH 1989].

[3)] Vgl. [BECKER 1957].

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

den weißen Tasten unseres Klaviers entspricht, verwende ich der Kürze wegen die modernen Tonbezeichnungen für diese acht Saiten, mit C für die tiefste beginnend, mit c für die höchste endend. Beide bilden eine Oktave als Ausgangsspanne (mit dem Zahlenverhältnis 2:1).

Als erstes wurde die 4. Saite im Abstand einer Quarte von der tiefsten, dann die 5. im Abstand einer Quinte gestimmt:

$$\begin{array}{cccc} C & F & G & c \\ \frac{1}{1} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{2}{1} \end{array}$$

(Ich benütze im folgenden anstelle der Verhältnis- die Bruchschreibweise.) Von G ausgehend, folgte eine Quarte nach unten ($\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$ für D), darauf wurde eine Quinte nach oben gesetzt ($\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$ für A) und abermals eine Quarte nach unten ($\frac{27}{16} : \frac{4}{3} = \frac{81}{64}$ für E) und eine Quinte nach oben ($\frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128}$ für H).

In der pythagoreischen Skala sind demnach die acht Töne und die sieben dazwischenliegenden Intervalle durch folgende Verhältnisse bestimmt:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} C & & D & & E & & F & & G & & A & & H & & c \\ \frac{1}{1} & & \frac{9}{8} & & \frac{81}{64} & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{2} & & \frac{27}{16} & & \frac{243}{128} & & \frac{2}{1} \\ & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & & \frac{256}{243} & & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & & \frac{256}{243} & \end{array}$$

Es gibt also einen Ganzton im Verhältnis 9:8 und einen Halbton im Verhältnis 256:243; dabei darf „Halbton" nicht wörtlich genommen werden, da zwei Halbtöne zusammen deutlich kleiner sind als ein Ganzton ($\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} = \frac{65536}{59049} \approx \frac{13}{12} < \frac{9}{8}$; die Differenz ist das sogenannte Komma).

Als Basis dieser Tonleiter diente den Pythagoreern, wie man sieht, die Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 – die sog. *Tetraktys* mit der Summe 10, welche als eine besonders vollkommene Zahl angesehen wurde.

Die Entdeckung der Beziehung zwischen Harmonien und Zahlenverhältnissen durch PYTHAGORAS und seine Schüler hat später in der darstellenden Kunst vielfachen Niederschlag gefunden. Neben dem Meister selbst wird auch der Pythagoreer PHILOLAOS bei Experimenten gezeigt. Das christliche Mittelalter fügte ihnen zwei weitere Repräsentanten bei: die Halbbrüder JUBAL und TUBALKAIN (oder THUBALKAIN). Ersterer gilt als Stammvater der Musikanten, letzterer als derjenige der Schmiede.[4]) Die Legende, daß PYTHAGORAS an einer Schmiede vorbeiging, das harmonische Zusammenklingen der durch verschiedene Hämmer erzeugten Töne bemerkte und bei dieser Gelegenheit durch Vergleich der Gewichte die kennzeichnenden Zahlverhältnisse gefunden habe, ist von NIKOMACHOS, GAUDENTIUS und BOETHIUS überliefert worden.[5]) Sie kann aus physikalischen Gründen nicht stimmen.[6])

Neben der Musiktheorie stellte die Astronomie das zweite wichtige Anwendungsgebiet der Mathematik für die Phythagoreer dar. Der Pythagoreer ARCHYTAS sagte

[4]) Vgl. 1. Moses 4, 19–22.
[5]) Vgl. [v. d. WAERDEN 1979], S. 368–369.
[6]) Vgl. unten den Abschnitt über GALILEI.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

Abb. 1:
Die Zuordnung einfacher Zahlenverhältnisse zu den Konsonanzen.
Links oben: JUBAL bei der Schmiede;
rechts oben: PYTHAGORAS experimentiert mit Glocken und Wassergläsern;
links unten: PYTHAGORAS experimentiert mit Saiten verschiedener Spannung;
rechts unten: PYTHAGORAS und PHILOLAOS vergleichen Töne und Pfeifen.
Franchino GAFORI: Theorica Musicae. Mailand 1492, fol. b6.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

einmal, die Mathematiker hätten treffliche Erkenntnisse nicht nur über die Natur des Alls gewonnen, sondern auch über die Gestirne, die Geometrie, die Zahlen, die Sphärik und nicht zum mindesten über die Musik. Und er fuhr fort:[7])

> Denn diese Wissenschaften scheinen verschwistert zu sein. Denn sie beschäftigen sich mit den beiden verschwisterten Urgestalten des Seienden *[nämlich Zahl und Größe]*.

Es scheint, als ob die Entdeckung der beherrschenden Stellung, welche die Zahl in der Harmonielehre einnimmt, den Pythagoreern den Anstoß für ihre zahlbestimmte Weltsicht gegeben hat. Alles, was man erkennen kann, hat nach PHILOLAOS Zahlcharakter:[8])

> Und in der Tat hat ja alles was man erkennen kann Zahl. Denn es ist nicht möglich, irgend etwas mit dem Gedanken zu erfassen oder zu erkennen ohne diese....
>
> Man muß die Werke und das Wesen der Zahl nach der Kraft beurteilen, die in der Zehnzahl liegt.... Denn erkenntnisspendend ist die Natur der Zahl und führend und lehrend für jeglichen in jeglichem, das ihm zweifelhaft oder unbekannt ist. Denn nichts von den Dingen wäre irgendwem klar weder in ihrem Verhältnis zu sich noch zu einander, wenn die Zahl nicht wäre und ihr Wesen. Nun bringt aber diese innerhalb der Seele alle Dinge mit der Wahrnehmung in Einklang und macht sie dadurch erkennbar.

Oskar BECKER hat ausgeführt[9]), daß der griechische Arithmosbegriff nicht nur einerseits enger ist als unser heutiger Zahlbegriff (da dieser auch negative, imaginäre und andere mathematische Zahlen umfaßt); er ist andererseits auch wesentlich umfassender, da er viel konkreter zu verstehen ist, indem er das Gezählte als ein zahlenmäßig wohlbestimmtes Gefüge betrachtet. Man müsse an diesen konkreten Zahlbegriff denken, wenn die Pythagoreer davon sprechen, die Zahlen seien geradezu das Wesen, die *Ousia*, aller Dinge. Daß aber diese Auffassung entstehen konnte, so meint BECKER, sei verursacht durch die grandiose Erkenntnis, daß symphonische Beziehungen durch Zahlen festgelegt seien. Daher die pythagoreische Grundthese: „Alles ist Zahl" oder, etwas vorsichtiger übersetzt, „Alles gleichet der Zahl".

Hier findet die von ARCHYTAS genannte Verschwisterung der vier mathematischen Wissenschaften – einschließlich der Musiktheorie, die wir heute doch an ganz anderer Stelle im System der Wissenschaften einordnen – ihre tiefste Begründung: nach pythagoreischer Auffassung sind sie allesamt durch die Zahl bestimmt. Die vier Disziplinen Arithmetik oder Zahlenlehre, Geometrie, Musiklehre und Astronomie bildeten für die Phythagoreer eine unauflösbare Einheit.

[7]) [DIELS-KRANZ 1960], Archytas (B1), S. 431–432.
[8]) [DIELS-KRANZ 1960], Philolaos (B2, B11), S. 408, 411.
[9]) [BECKER 1957], S. 163–164.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Abb. 2:
Unterricht in der Musik.
Franchinius GAFURIUS: De Harmonica Musicorum Instrumentorum Opus. Mailand 1518. Titelblatt.

2.2 Platons Kosmos

Bekanntlich hat PLATON in dem im „Timaios“ enthaltenen Schöpfungsmythos die musikalische Konstruktion der Pythagoreer als Gerüst für den Aufbau des Kosmos gewählt und damit Musiktheorie und astronomisches Weltbild auf das Engste miteinander verknüpft.

Bereits zuvor hatte er im „Staat“ (im 7. Buch, im Anschluß an das berühmte Höhlengleichnis) die Forderung erhoben, zukünftige Staatsmänner müßten, neben anderem Training, die mathematischen Wissenschaften studiert haben.[10]) Das Erlernen der Rechen- und Zählkunst, heißt es in bezug auf die Arithmetik, sei[11])

[10]) [PLATON 1], S. 264–275 (525A-531D).
[11]) [PLATON 1], S. 265.

Digitale Bibliothek Braunschweig
http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

> für einen praktischen Kriegsmann unerläßlich notwendig wegen der Anordnung des Kriegsheeres, zweitens auch für den wahren Wissenschaftsfreund, weil er dadurch aus der Welt des wandelbaren Werdens sich emporarbeiten und mit dem unwandelbaren Sein umgehen lernen muß.

Es folgen Begründungen für die Notwendigkeit des Studiums der Geometrie, der Astronomie und schließlich der Musiktheorie, wobei es heißt:[12])

> Wie es mir scheint ... sind die Ohren ebenso für die an harmonischen Tönen sich offenbarende Bewegung bestimmt wie die Augen für die Astronomie, und diese Wissenschaften sind miteinander verschwistert, wie die Pythagoreer behaupten, mit welcher Behauptung auch wir, mein Glaukon, einverstanden sind, oder wie wollen wir es machen? Ebenso, gab er zur Antwort.

Im frühen 6. nachchristlichen Jahrhundert hat dann BOETHIUS (ca. 480–520) diese vier mathematischen Wissenschaften unter dem Namen des *Quadrivium* (des ‚vierfachen Weges') zusammengefaßt und sie damit für das ganze Mittelalter in eine kanonische Form gegossen.

Aus dem „Timaios" kann ich ebenfalls nur jene Stelle herausgreifen, in der PLATON die frühpythagoreische Musiktheorie verwendet, um in unvergleichlicher Weise das Bild vom harmonisch geordneten Kosmos zu entwerfen. Der Schöpfer als Inbegriff des Guten und Vollkommenen konnte die Welt nur als die schönstmögliche erschaffen, weshalb sie mit Vernunft begabt sein mußte. Vernunft aber kann es ohne Seele in einem Körper nicht geben.[13])

> In dieser Erwägung bildete er die Vernunft in eine Seele und die Seele in einen Körper ein und fügte so aus ihnen den Bau des Weltalls zusammen, um so naturgemäß das möglichst schönste und beste Werk vollendet zu sehen.

Wie aber pflanzte der Demiurg der Seele die Vernunft ein und dem Weltenkörper die vernunftbegabte Seele? Nachdem er durch Mischung von zwei Urstoffen, dem Unteilbaren und dem an den Körpern haftenden Geteilten eine neue Wesenheit erzeugt hatte[14]),

> nahm er alle drei und mischte sie zu einer einzigen Gestalt zusammen, indem er die der Mischung widerstrebende Natur des Anderen gewaltsam mit dem Selbigen verträglich machte. Und nachdem er so beide mit der Seelensubstanz gemischt und so aus Dreien Eins gemacht hatte, teilte er wiederum dieses Ganze in so viel Teile, als es sich gehörte, so aber, daß ein jeder aus dem Selbigen, dem Anderen und der Seelensubstanz zusammengesetzt war. Er begann aber diese Teilung folgendermaßen: Zuerst nahm er einen Teil von dem Ganzen weg, darauf das Doppelte desselben, zum dritten sodann das Anderthalbfache des zweiten Teils, zum vierten das Doppelte des zweiten, zum fünften das Dreifache des

[12]) [PLATON 1], S. 273.
[13]) [PLATON 2], S. 109 (30A–30B).
[14]) [PLATON 2], S. 113–115 (35A–36C).

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

> dritten, zum sechsten das Achtfache des ersten und zum siebten das Siebenundzwanzigfache des ersten. Hierauf füllte er sowohl die zweifachen als dreifachen Zwischenräume aus, indem er noch weitere Teile vom Ganzen abschnitt und sie in die Mitte von ihnen hineinsetzte, so daß in jedem Zwischenraume zwei Mittelglieder waren, von denen das eine um den gleichen Bruchteil der äußeren Glieder das eine der letzteren übertraf und von andern übertroffen wurde, das andere aber um eine gleiche Zahl. Da nun aber Zwischenräume von $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$ und $1\frac{1}{8}$ durch diese Verbindungsglieder innerhalb der frühern Zwischenräume entstanden waren, so füllte er mit dem Zwischenraum von $1\frac{1}{8}$ alle Zwischenräume von $1\frac{1}{3}$ aus und ließ so von einem jeden der letzteren noch einen Teil übrig, so daß der Zwischenraum dieses Teiles, in Zahlen ausgedrückt, dem Verhältnisse der Glieder 243 zu 256 entsprach. Und damit hatte er denn auch die Mischung, von welcher er alle diese Teile hinwegnahm, ganz und gar verbraucht. Dies ganze so zusammengefügte Gebilde aber spaltete er hierauf der Länge nach in zwei Teile, verband dieselben kreuzweise in ihrer Mitte, so daß sie die Gestalt eines *Chi (X)* bildeten, und bog dann jeden von beiden in einen Kreis zusammen, so daß er also jeden mit sich selbst und beide mit einander in dem Punkte, welcher ihrer Durchschneidung gegenüberlag, verknüpfte, umschloß beide mit der auf dieselbe Weise und in demselben Raume herumgeführten Bewegung und machte den einen dieser Kreise zum äußeren und den andern zum inneren. Den Umlauf sodann, der im äußeren, und den, der im inneren Kreise vor sich ging, benannte er nach den beiden Wesenheiten, von welchen sie herrührten, jenen den des Selbigen und diesen den des Anderen, und führte den ersteren in der Richtung der Seite nach rechts herum, den letzteren aber in der Richtung der Diagonale nach links. Das Übergewicht aber verlieh er dem des Selbigen und Gleichartigen, denn er beließ ihn in ungeteilter Einheit; den inneren aber spaltete er sechsfach und teilte ihn so in sieben ungleiche Kreise, je nach den Zwischenräumen des Zweifachen und Dreifachen, und setzte fest, daß zwar einander entgegengesetzt die Kreise sich bewegen sollten, drei aber an Geschwindigkeit gleich, vier hingegen unter sich und von den dreien verschieden, jeden so, daß sie sich nach einem bestimmten Verhältnisse bewegten.

Vollzieht man die hier beschriebene zweistufige Konstruktion von Zahlenreihen schrittweise unter Beachtung der Tatsache, daß zum Schluß eine Spaltung vorgenommen wird, so zeigt sich, daß der Weltenschöpfer im ersten Schritt die Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 9, 8, 27 konstruiert, die vermutlich schon die älteren Pythagoreer in der Form des griechischen Buchstabens *Lambda* (Λ) dargestellt hatten (s. Abb. 3).

Im dritten Schritt werden links die Ganztöne 9:8 eingefügt, so daß sich genau drei pythagoreisch gestimmte Oktaven ergeben. Die Reihe der Dreierpotenzen rechts enthält daneben Töne aus anderen Tongeschlechtern.[15])

Indem das ganze so entstandene und mit Harmonien durchtränkte Gebilde dann in der Länge aufgeschnitten, in Kreuzform (in Gestalt eines *Chi: X*) verbunden und zu

[15]) Vgl. [KRAFFT 1971], S. 348–351.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

zwei miteinander verknüpften, gegeneinander geneigten Kreisringen zusammengebogen wird, entstehen der Himmelsäquator und die Ekliptik; letztere wird ihrerseits wieder zerlegt in die Bahnen der sieben Wandelsterne.

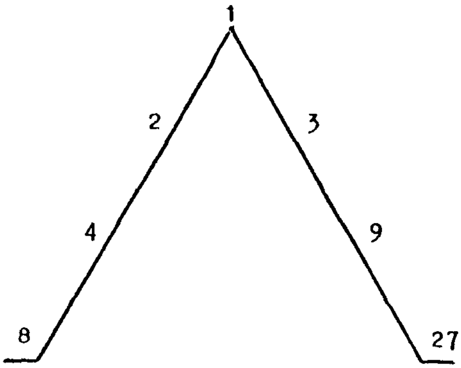

Abb. 3:
Das platonische Lambda:
1. Konstruktionsschritt.

Der zweite Schritt erzeugt daraus

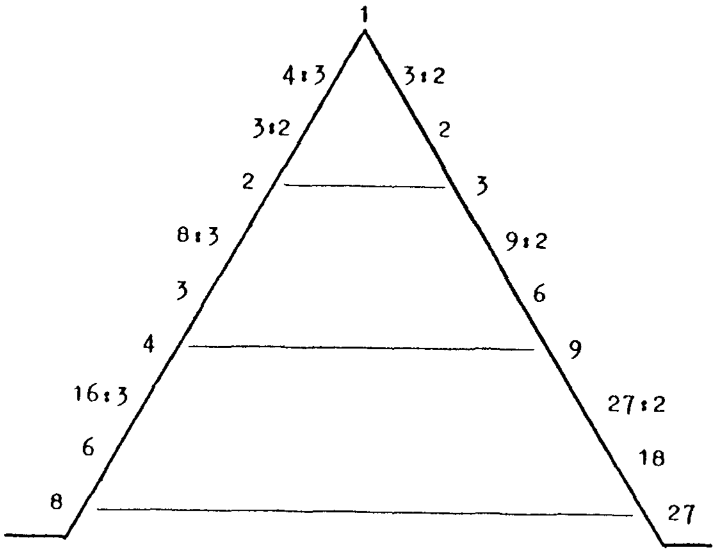

Abb. 4:
Das platonische Lambda:
2. Konstruktionsschritt.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

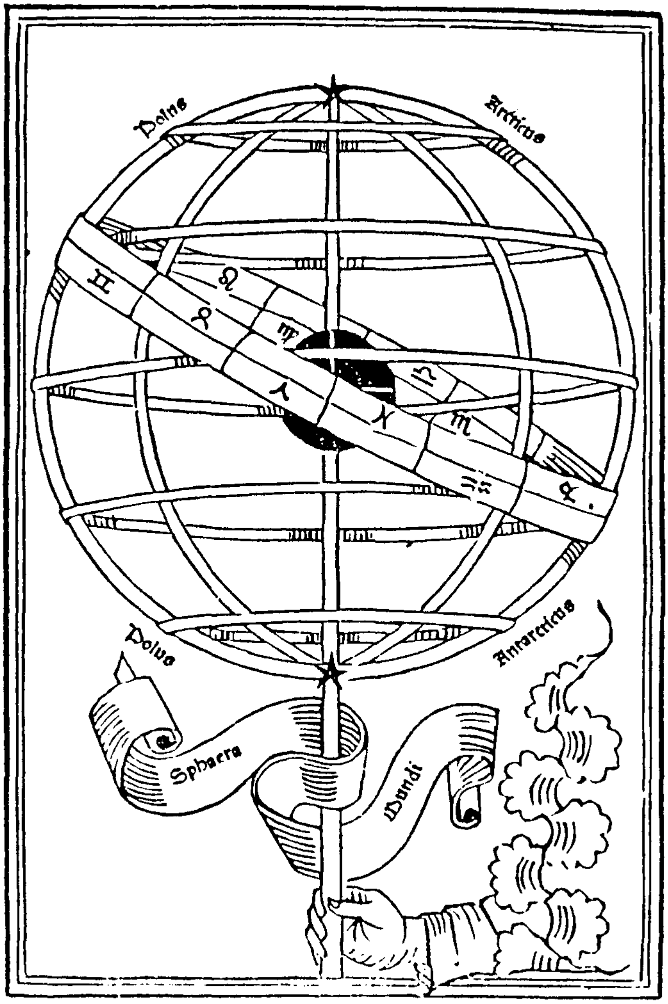

Abb. 5:
Kernstück einer die Himmelskreise darstellenden Armillarsphäre sind der (hier in der Mitte horizontal gelagerte) Äquator und die gegen ihn geneigte (als Band dargestellte) Ekliptik.
Darstellung der Sphaera Mundi aus Johannes DE SACROBOSCO: De sphera. Augsburg 1482, fol. *a*1^v.

Niemand hat je die Vorstellung von den Sphärenharmonien in eine eindringlichere Form gegossen und durch die Verknüpfung der irdischen mit der himmlischen Musik den Glauben an die Einheit des Mikro- und Makrokosmos überzeugender zum Ausdruck gebracht!

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

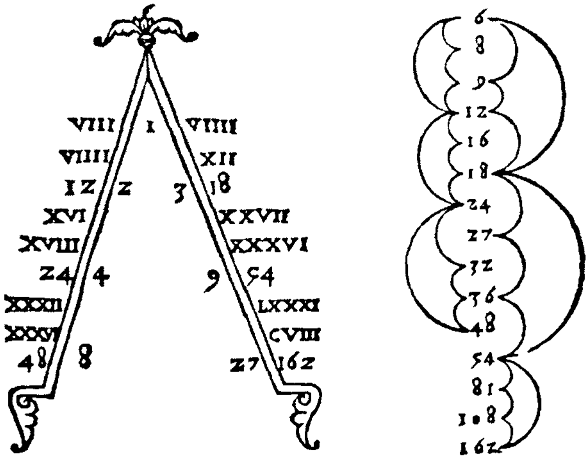

Abb. 6:
Das platonische Lambda und Intervallverhältnisse auf den mit 6 erweiterten Skalen.
Franceso GIORGI: De Harmonia Mundi totius. Venedig 1525.

3 Die Musiktheoretiker der Renaissance

Die Weiterentwicklung der praktischen Musik hin zur Mehrstimmigkeit mit selbständig geführten Stimmen, der Polyphonie, erzwang zu Beginn der Neuzeit eine Revision der pythagoreischen Musiklehre. Dies betraf vor allem die Beurteilung der Terz. Walliser Musikgelehrte hatten schon um 1200 vorgeschlagen, die Terz mit dem Verhältnis 5:4 unter die konsonanten Zusammenhänge aufzunehmen, konnten sich aber noch nicht durchsetzen. Erst die italienische Renaissance brachte den Durchbruch, als die Komponisten mehr und mehr Terzen und auch Sexten in mehrstimmigen Kompositionen derart verwendeten, daß diese Zweiklänge bzw. die sie enthaltenden Akkorde nicht mehr – wie für dissonante Zusammenklänge erforderlich – einer Auflösung in konsonante Harmonien bedurften.[16])

Im Jahre 1529 protestierte Ludovico FOGLIANO in der „Musica theorica" gegen die Fesseln der pythagoreischen Lehre symphoner Intervalle. Er ließ insbesondere die Zahl 5 in den Verhältnissen von als konsonant geltenden Intervallen zu und wollte alle die folgenden Zweiklänge aufgenommen wissen:

6:5 kleine Terz	8:5 kleine Sext	12:5 kleine Dezime = kleine Terz über der Oktave
5:4 große Terz	5:3 große Sext	5:2 große Dezime = große Terz über der Oktave
16:5 kleine Sext über der Oktave		8:3 Undezime = Quarte über der Oktave
10:3 große Sext über der Oktave		

[16]) Siehe hierzu insbesondere: [COHEN 1984].

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

FOGLIANOs Vorschläge wurden jedoch noch nicht allgemein angenommen – vielleicht war die Zahl der angestrebten Neuerungen zu hoch, als daß die Zeitgenossen sich damals damit befreunden konnten.

Die erfoglreiche Reform ist verbunden mit dem Namen des großen venezianischen Musiktheoretikers Giuseppe ZARLINO (1517–1590), Kapellmeister an San Marco. Er zerlegte in den „Istitutioni harmoniche" 1558 die Quinte in eine kleine und eine große Terz (6:5:4), ähnlich wie die Oktave nach pythagoreischer Ansicht in eine Quarte und eine Quinte zerfällt (4:3:2). Entsprechend setzte er die große Terz aus einem großen und einem kleinen Ganztonschritt zusammen (10:9:8). Quarte und große Terz sind dann durch 16:15:12 miteinander verbunden; der Unterschied 16:15 wird als großer oder diatonischer Halbton bezeichnet. Denn offensichtlich ist er nicht die Hälfte des Ganztons 9:8; vielmehr führt ein Vergleich beider auf den kleinen oder chromatischen Halbton $\frac{9}{8} : \frac{16}{15} = \frac{135}{128}$, auch großes Chroma genannt.

Für die sieben Haupttöne dieser reinen Stimmung ergibt sich somit die aus relativ kleinen natürlichen Zahlen gebildete Folge von Verhältnissen

$$\begin{array}{cccccccc} C & D & E & F & G & A & H & c \\ \frac{1}{1} & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{15}{8} & \frac{2}{1} \end{array}$$

oder die Zahlenfolge

$$24 \quad 27 \quad 30 \quad 32 \quad 36 \quad 40 \quad 45 \quad 48.$$

Zur Begründung verweist ZARLINO auf die besondere Rolle der Zahl 6 als der ersten vollkommenen Zahl (d.h. einer Zahl, die gleich der Summe ihrer Teiler ist), auf die 6 Schöpfungstage, die 6 Planeten und anderes mehr. So ersetzt er die *Tetraktys* der Pythagoreer durch den *Senario*, die Gesamtheit der ersten sechs ganzen Zahlen.

Obwohl also die reine Stimmung fast alle auf den Grundton bezogenen Zweiklänge durch aus sehr kleinen Zahlen gebildeten Verhältnissen gewinnt und daher dem Empfinden des menschlichen Ohres besser angepaßt ist als die pythagoreisch-platonische, eignet sie sich kaum zur Modulation in andere Tonarten, nehmen doch dann die beiden unterschiedlich großen Ganztonschritte jeweils andere Positionen innerhalb der Tonleiter an.

Daher strebte man eine Angleichung, eine Temperierung an. Das führte auf die sogenannte mitteltönige Stimmung, die in der 2. Hälfte des 16. Jahrhunderts durch den schon genannten italienischen Organisten ZARLINO und den Spanier Francesco SALINAS (1530–1590) propagiert und durchgesetzt wurde. (Wie schon vor ihnen der Organist Arnold SCHLICK im 1511 veröffentlichten „Spiegel der Organisten und Orgelmacher" gingen die beiden Verfasser (ZARLINO in den „Istitutioni harmoniche", SALINAS in „De musica libri septem", Salamanca 1577) von den reinen Terzen aus, die sie durch das geometrische Mittel in zwei gleich große Ganztöne unterteilten. So entsteht in der mitteltönigen Temperatur der Ganzton im Verhältnis $\frac{\sqrt{5}}{2} : 1$; diese Konstruktion ist es, nach der die Skala ihren Namen trägt.)

Ein erster Vorschlag, das Intervall einer Oktave in zwölf *gleiche* Halbtonschritte zu unterteilen, wurde im Jahr 1581 von Vinzenco GALILEI (um 1533 (oder 1520?)–1591), dem Vater von Galileo GALILEI, in seinem Werk „Dialogo della musica antica e

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

Abb. 7:
Das platonische Lambda auf dem Gewand der Arithmetik.
(Im Vordergrund rechnet links BOETHIUS mit indisch-arabischen Ziffern – ein Anachronismus, rechts PYTHAGORAS mit Rechensteinen auf dem Rechenbrett.)
Gregor REISCH: Margarita Philosophica. Ausgabe Straßburg 1512, fol. [K vi]r.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

moderna“ (Florenz 1581) gemacht. Vincenzo GALILEI wählte den mittleren der verschiedenen Halbtonschritte der damaligen Zeit aus, das Verhältnis 18:17. Dies führt für die Oktave näherungsweise zum Verhältnis 11,57:5,83 statt 11,66:5,83 = 2:1, für die Quinte auf 6,12:4,10 statt 6,15:4,10 = 3:2 und für die große Terz auf das Verhältnis 10,50:8,35 statt 10,50:8,40 = 5:4. Dieser Vorschlag GALILEIs scheint gegen Ende des 16. Jahrhunderts für die Laute und ähnliche mit Griffbrettern versehene Instrumente weithin verwirklicht worden zu sein, wo sich die einheitliche Teilung gemäß 18:17 geometrisch leicht konstruieren läßt.

Die endgültige Lösung, die gleichschwebend temperierte Stimmung mit vollkommen reiner Oktave, hat als erster der niederländische Ingenieur und Mathematiker Simon STEVIN (1548–1620) errechnet.[17]) In der damals unveröffentlicht und daher wirkungslos gebliebenen um 1596 verfaßten Schrift „Vande Spiegheling der Singconst“ (= Theorie des Gesangs – in Wahrheit wird nicht das Singen, sondern die Theorie der Musik als solche behandelt –) vertrat er die Überzeugung, die Oktave werde von sechs gleichgroßen ganzen oder zwölf gleichgroßen Halbtönen gebildet. Das bedeutet eine Halbtonschrittweite $k = \sqrt[12]{2}:1$. Damit setzte er sich in Widerspruch zur bis dahin – bei aller Verschiedenheit im einzelnen – einhellig akzeptierten Ansicht, die Elementarbausteine der Tonleiter seien aus den fundamentalen Zweiklängen zu gewinnen. Ob diese nun aus der pythagoreischen *Tetraktys* oder dem *Senario*, der harmonischen Sechszahl des ZARLINO, abgeleitet wurden, war nur zweitrangig gegenüber der gemeinsamen Basis, nur Verhältnisse in kleinen natürlichen Zahlen als Konstruktionselemente zuzulassen. Davon waren die bisher besprochenen Autoren nicht abgegangen. Sie hatten lediglich versucht, durch Temperieren, d.h. durch Anbringen kleiner Abweichungen an den Idealwerten, dem nun einmal nicht zu entgehenden Dilemma Rechnung zu tragen, daß diese Bauelemente in sich nicht ganz stimmig sind. Das wurde als ein Problem der musikalischen Praxis gesehen, nicht als Prinzipienfrage.

4 Die frühe Neuzeit

4.1 Keplers Harmonielehre

Johannes KEPLERs Lebenswerk wurde geleitet von einer neuen Fragestellung, die er an die Natur richtete. In seiner Formulierung:[18])

> Drei Dinge waren es vor allem, deren Ursachen, warum sie so und nicht anders sind, ich unablässig erforschte, nämlich die *Anzahl, Größe* und *Bewegung* der Bahnen [der Wandelsterne].

[17]) Stevin's Abhandlung wurde erstmals herausgegeben von D. BIERENS DE HAAN: S. STEVIN, „Vande spiegeling der singconst“ et „Vande molens“. Deux traités inédits. Amsterdam 1884. Ein Wiederabdruck erfolgte in: The Principal Works of Simon Stevin, vol. 5, mit Kommentar von A.D. FOKKER auf S. 415–420. Vgl. auch E.J. DIJKSTERHUIS: Simon Stevin. The Hague 1970, S. 120–122.

[18]) [KEPLER 1596], S. 20.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

Typus Musices:

Abb. 8:
Der Schmied TUBALKAIN auf einer Darstellung der Musik.
Rechts im Hintergrund die Schmiede mit Wasserrad, vorn werden die Hämmer gewogen!
Gregor REISCH: Margarita Philosophica. Ausgabe Straßburg 1512, fol. [Miv]^{v}.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

In seiner Jugendschrift, dem „Mysterium cosmographicum" oder Weltgeheimnis[19]) hatte KEPLER (1571–1630) den Grund für die Sechszahl der Planeten in den fünf regelmäßigen, platonischen Körpern zu finden geglaubt, die er annähernd in bestimmter Reihenfolge in die durch die Planetenbahnen festgelegten Kugelschalen einpassen konnte. Da es nur fünf vollkommene regelmäßige Polyeder gibt, war in ihnen, so meinte KEPLER damals, der letzte geometrische Grund für die Existenz der genau sechs Planeten des kopernikanischen Systems gefunden. So gab er seiner Überzeugung von der ontologischen Existenz der geometrischen Dinge, die urbildlich im göttlichen Wesen gründen, höchsten Ausdruck, indem er schrieb:[20]) „Die Geometrie ist einzig und ewig, ein Widerschein aus dem Geiste Gottes."

Schon damals, am Ende des 16. Jahrhunderts, entstand vor KEPLERs geistigem Auge ein größeres Werk, dem er den Titel geben wollte „De Harmonice Mundi Dissertatio cosmographica", also eine den Kosmos beschreibende Darstellung über die Weltenharmonie. Am 14. Dezember 1599 teilte er in einem Brief an den bayerischen Kanzler Herwart von Hohenburg mit:[21])

> Das Buch wird fünf Teile erhalten, nämlich 1. einen geometrischen über die darstellbaren Figuren, 2. einen arithmetischen über die dreifachen Verhältnisse, 3. einen musikalischen über die Ursachen der Harmonien, 4. einen astrologischen über Ursachen der Aspekte, und 5. einen astronomischen über die Ursachen der periodischen Bewegungen.

Man entnimmt diesem Zitat, wie KEPLER sein Thema, die Ergründung des Weltenbaues, konzipiert hat als Entfaltung des klassischen Quadriviums.

4.1.1 Die abstrakten harmonischen Verhältnisse

Entsprechend seiner Überzeugung, daß die Urbilder des Schöpfers aus der Geometrie genommen sein müßten, leitet KEPLER in der endgültigen Fassung der 1619 veröffentlichten „Weltharmonik" die harmonischen Verhältnisse von den konstruierbaren regelmäßigen geometrischen Figuren ab. Aus diesen geometrischen Betrachtungen gewinnt er jene seiner Meinung nach allein in der Natur zulässigen Verhältnisse. Ist er doch der Meinung, daß irrationale Zahlen, da sie prinzipiell nicht vollständig erkennbar oder ‚wissbar' sind – wie KEPLER sagt – vom Weltschöpfer ausgeschlossen wurden, als er den Bauplan des Kosmos entwarf. Nicht die Zahlenlehre oder Arithmetik kann also seiner Ansicht nach den tiefsten Seinsgrund liefern, sondern nur die konstruktive Geometrie.

Das Ergebnis dieser in den beiden ersten Büchern vorgestellten geometrischen Überlegungen ist, daß in den zulässigen Proportionen die ungeraden Zahlen größer als fünf ausgeschlossen werden müssen. – Mögen solche Überlegungen den modernen

[19]) [KEPLER 1596].
[20]) Zitiert nach [KEPLER 1619], S. 14* *r.*
[21]) [KEPLER 1619], S. 24* *r.*

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

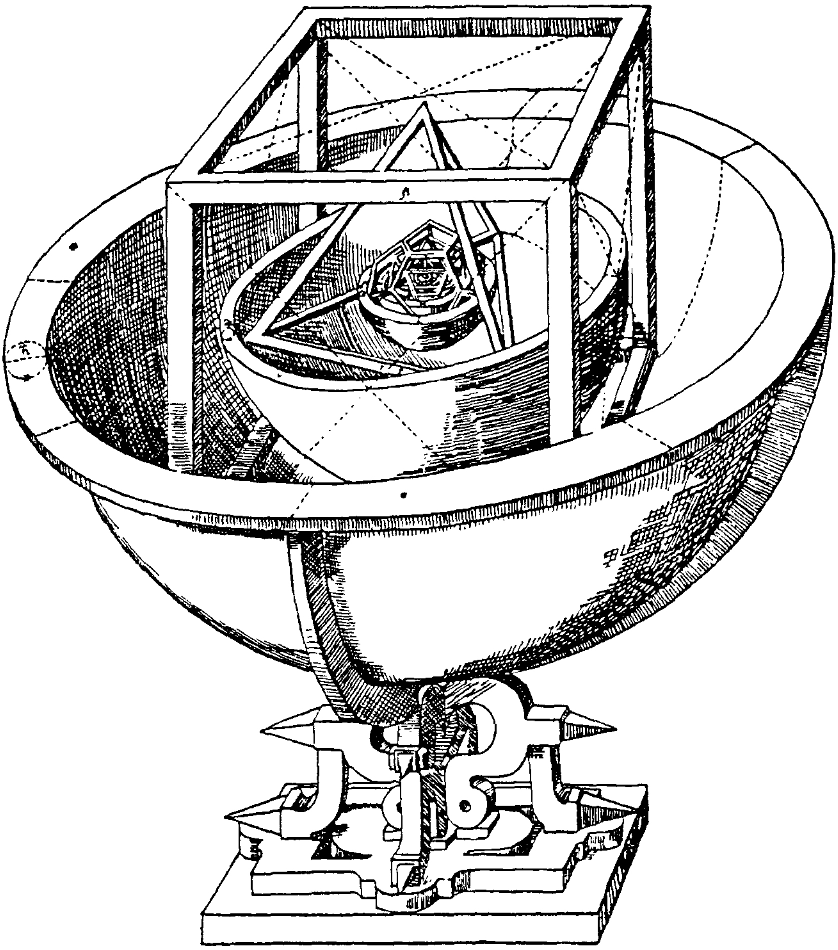

Abb. 9:
KEPLERs frühes Weltmodell.
Zwischen die durch Kugelschalen dargestellten Planetenbahnen sind die fünf regelmäßigen Körper Würfel, Tetraeder, Dodekaeder, Ikosaeder und Oktaeder eingepaßt.
Johannes KEPLER: Mysterium Cosmographicum. Tübingen 1596, Tafel III.

Naturwissenschaftler auch merkwürdig berühren oder ihm fremdartig erscheinen, so ist KEPLER selbst doch fest überzeugt davon, mit seinen Spekulationen auf dem richtigen Weg zur wahren Naturerkenntnis zu sein, wie folgendes Zitat belegen soll:[22])

> Da es nun aber unendlich viele harmonische Proportionen gibt und diese, was unser Wissen um sie anlangt, noch unbearbeitet, ungeschliffen, unscheinbar,

[22]) [KEPLER 1619], S. 107.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

> unbenannt angehäuft oder vielmehr regellos zerstreut sind wie ein Haufen roher Steine und Balken, so folgt, daß wir uns daran machen, sie zuzurichten, ihnen Namen zu geben, um zuletzt aus ihnen das herrliche Gebäude des harmonischen Systems oder der musikalischen Tonleiter aufzurichten, ein Gebäude, dessen Gliederung nicht willkürlich, wie einer denken möchte, nicht eine menschliche Erfindung ist, die man abändern könnte, sondern sich durch und durch vernunft- und naturgemäß darstellt, so daß Gott der Schöpfer selber sie beim Abstimmen der himmlischen Bewegungen ausgedrückt hat.

Dieses Zurichten erweist sich als ein sehr mühsames Geschäft, das KEPLER nicht in *einem* Anlauf bewältigen kann. Begründet in den geometrischen Betrachtungen der beiden ersten Bücher, die zu erläutern zu weit führen würde, und ergänzt durch eine spezielle Definition einer sog. *harmonischen Teilung,* gelingt es ihm schließlich, genau *sieben* harmonische Teilungen (in diesem speziellen Sinne) abzuleiten, nämlich:

Die Zerlegungen	mit den Konsonanzen		
$2=1+1$	2 : 1,	1 : 1	
$3=1+2$	3 : 2,	3 : 1,	2 : 1
$4=1+3$	4 : 3,	4 : 1,	3 : 1
$5=1+4$	5 : 4,	5 : 1,	4 : 1
$6=1+5$	6 : 5,	6 : 1,	5 : 1
$5=2+3$	5 : 3,	5 : 2,	3 : 2
$8=3+5$	8 : 5,	8 : 3,	5 : 3

Das mühsame Verfahren liefert also schließlich genau die erwünschten Konsonanzen, und der Astronom kann voller Freude erklären:[23])

> Ich habe diese sieben Schnitte der Saite zuerst aus dem Gehör gefunden ... hernach habe ich die Ursachen der einzelnen Teilungen wie ihre Gesamtzahl nicht ohne große Mühe aus den tiefsten Gründen der Geometrie ermittelt. Der wissbegierige Leser möge nachlesen, was ich über diese Teilungen vor zweiundzwanzig Jahren im XII. Kapitel meines Mysterium Cosmographicum geschrieben habe, und sehen, wie ich daselbst über die Ursache der Teilungen und Harmonien phantasiert habe, indem ich mich irrtümlicherweise darauf versteift habe, ihre Anzahl und ihre Verhältnisse aus der Zahl der fünf regulären Körper abzuleiten, während die Wahrheit vielmehr darin liegt, daß sowohl die fünf Körper als auch die musikalischen Harmonien und die Teilungen der Saiten ihren gemeinsamen Ursprung in den regulären ebenen Figuren haben.

So tief sitzt seine Überzeugung, daß die Urbilder der sinnlichen Harmonien im Geistigen liegen und nur über mathematische Begriffe voll erfaßbar sind, daß er sagen kann:[24])

[23]) [KEPLER 1619], S. 111/112.
[24]) [KEPLER 1619], S. 214.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

> Denn wenn der Geist nie eines Auges teilhaftig gewesen wäre, so würde er sich zum Begreifen der außer ihm gelegenen Dinge das Auge fordern und die ihm selbst entnommenen Gesetze zu dessen Bildung vorschreiben ..., denn das dem Geist eingeborene Erkennen der Quantitäten gibt an, wie das Auge sein muß, und daher ist das Auge so beschaffen, weil der Geist so beschaffen ist, nicht umgekehrt.

4.1.2 Die himmlische Harmonie

Nachdem er so die letzte geometrische Begründung für die Existenz der Harmonien gefunden hat, ist die zweite große Aufgabe, nachzuweisen, daß sie auch den Makrokosmos beherrschen.[25]) Dieser wendet sich KEPLER dann im 5. Buch der „Weltharmonik" zu. Er hat es überschrieben „Die vollkommenste Harmonie in den himmlischen Bewegungen und die daher rührende der Exzentrizitäten, Bahnhalbmesser und Umlaufzeiten". In der Vorrede gibt er seiner Freude darüber Ausdruck[26]),

> daß sich die ganze Welt der Harmonik, so groß sie ist, mit allen ihren im III. Buch auseinandergesetzten Teilen bei den himmlischen Bewegungen findet, zwar nicht in der Art, wie ich mir vorgestellt hatte (und das ist nicht der letzte Teil meiner Freude), sondern in einer ganz anderen, zugleich höchst ausgezeichneten und vollkommenen Weise.

Ich kann das weitläufige Ergebnis hier lediglich anhand der Überschriften der Kapitel 4 bis 9 des 5. Buches in gedrängter Form vorführen:

- IV. Worin bei den Bewegungen der Planeten die einfachen Harmonien ausgedrückt sind und daß alle Harmonien, die in der Musik auftreten, sich am Himmel finden.
- V. Daß die Töne der Tonleiter oder die Stufen des Systems sowie die Tongeschlechter Dur und Moll von bestimmten Bewegungen ausgedrückt werden.
- VI. Daß die Tonarten oder die musikalischen Modi je in gewisser Weise von den einzelnen Planeten ausgedrückt werden.
- VII. Daß es Kontrapunkte oder Gesamtharmonien aller Planeten geben kann, und zwar verschiedene, indem eine aus der anderen folgt.
- VIII. Daß in den Planeten die Natur der vier Stimmen Diskant, Alt, Tenor, Baß ausgedrückt ist.
- IX. Beweis, daß zur Erzielung dieser harmonischen Anordnung die Exzentrizitäten der Planeten geradeso, wie sie ein jeder von ihnen besitzt, und nicht anders gemacht werden dürfen.

Die im Titel des 5. Buches angesprochene „vollkommenste Harmonie in den himmlischen Bewegungen", in der die Radien, Exzentrizitäten, Geschwindigkeiten und

[25]) Zu KEPLERs Musiktheorie vgl. [DICKREITER 1973]. KEPLERs „Himmelsmusik" ist auch das Thema von [WALKER 1987].

[26]) [KEPLER 1619], S. 279.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

Umlaufzeiten der Planetenbahnen und -bewegungen ihre letzte Begründung finden sollen, löst sich also auf in ein ganzes Bündel himmlischer Harmoniebeziehungen.

Freilich macht es KEPLER noch erhebliche Mühe, diese Harmonien herauszuarbeiten, liegen sie doch nicht etwa in den extremen Abständen der einzelnen Planeten von der Sonne oder dem Verhältnis der Umlaufzeiten von je zwei Planeten offen zutage. Erst beim Vergleich mehrerer Bewegungen untereinander stellt KEPLER fest:[27])

> Vergleicht man nun aber die extremen Bewegungen je zweier Planeten miteinander, so bricht sofort auf den ersten Blick die Sonne der Harmonien in aller Klarheit hervor.

Die Durchrechnung im einzelnen lehrt, daß die zwanzig möglichen Kombinationen von je zwei Planeten in den beiden extremen Positionen für die Bewegungen (Tagesbögen, von der Sonne aus gesehen) fast alle harmonischen Intervalle ergeben. Hätte sich KEPLERs geheimste Hoffnung schöner bestätigen können?

Zum Abschluß des 4. Kapitels weist KEPLER auf einen wichtigen Unterschied hin und setzt ihn in Beziehung zur musikalischen Praxis:[28])

> Es besteht nun aber ein großer Unterschied zwischen den angeführten Harmonien bei den einzelnen Planeten und denen bei Planetenpaaren. Die ersteren können nicht in einem bestimmten Zeitpunkt bestehen; bei den letzteren ist dies durchaus möglich. Denn wenn ein Planet gerade im Aphel ist, kann er nicht zugleich auch im gegenüberliegenden Perihel sein. Von zwei Planeten aber kann der eine in seinem Aphel und zu gleicher Zeit der andere in seinem Perihel sein. Es gilt daher folgende Analogie. Wie sich der einfache oder einstimmige Gesang, den man Choralgesang nennt und der allein den Alten bekannt war, zum mehrstimmigen, sogenannten figurierten Gesang verhält, der eine Erfindung der letzten Jahrhunderte ist, so verhalten sich auch die Harmonien, die die einzelnen Planeten bilden, zu den Harmonien der Planetenpaare.

Bei der weiteren Untersuchung des Zusammenklingens von mehr als zwei Planeten zur gleichen Zeit findet KEPLER dann im 7. Kapitel des 5. Buches heraus[29]),

> daß es Gesamtharmonien aller Bewegungen geben kann, und zwar in beiden Geschlechtern Dur und Moll und bei jedem Geschlecht in doppelter Form oder (wenn man so sagen darf) in doppelter Tonart.

Und so kann er schließlich aus tiefster Überzeugung sagen:[30])

> Es sind also die Himmelsbewegungen nichts anderes als eine fortwährende mehrstimmige Musik (durch den Verstand, nicht das Ohr faßbar), eine Musik, die durch dissonierende Spannungen, gleichsam Synkopen und Kadenzen hindurch ... auf bestimmte, vorgezeichnete, je sechsgliedrige (gleichsam sechsstimmige)

27) [KEPLER 1619], S. 302.
28) [KEPLER 1619], S. 304.
29) [KEPLER 1619], S. 313.
30) [KEPLER 1619], S. 315.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

Kapitel VI.

Daß in den extremen Bewegungen der Planeten in gewisser Weise die musikalischen Modi oder Tonarten ausgedrückt sind.

Dies folgt aus den vorausgehenden Ausführungen, und es bedarf nicht vieler Worte. Die einzelnen Planeten bezeichnen in gewisser Weise mit ihrer Bewegung im Perihel Stufen des Systems, insoweit es ihnen gegeben ist, ein bestimmtes Intervall der Tonleiter zwischen bestimmten Tönen oder Stufen zu durchlaufen, angefangen je mit dem Ton oder der Stufe, die im vorausgehenden Kapitel der Bewegung im Aphel zugewiesen wurde. Dabei traf auf Saturn und Erde die Stufe *G*, auf Jupiter die Stufe ḩ, die nach *G* höher transponiert werden kann, auf Mars *f*ϱ, auf Venus *e*, auf Merkur *A* in einem höheren System. Siehe die einzelnen Planeten in der gebräuchlichen Notenschrift. Die Zwischenstufen, die man hier mit Noten ausgefüllt sieht, werden freilich nicht wie die Grenzstufen ausdrücklich gebildet. Denn die Planeten streben von einer Grenzlage aus nicht in Sprüngen und Intervallen, sondern in kontinuierlichem Steigen und Fallen der entgegengesetzten Grenzlage zu, indem sie alle (der Potenz nach unendlich vielen) Zwischenstufen wirklich durchlaufen. Ich konnte dies aber nicht anders ausdrücken als durch eine fortlaufende Reihe von Zwischennoten. Venus hält sich fast auf einem einzigen Ton, indem der Umfang des Ansteigens bei ihr nicht einmal das kleinste der melodischen Intervalle erreicht.

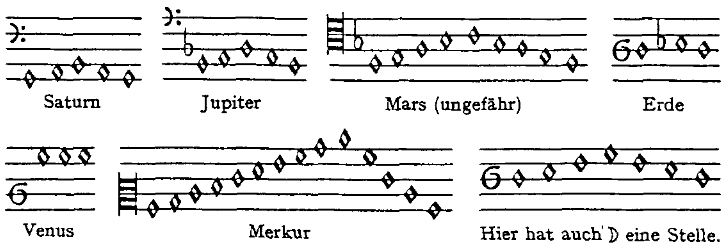

Abb. 10:
Die Planetenmelodien nach KEPLER.
Außer den sechs Planeten weist KEPLER auch dem Mond eine Melodie zu.
Johannes KEPLER: Harmonice Mundi. Linz 1619.
Beginn von Buch V, Kap. 6 (dt. Übers. von Max CASPAR).

Klauseln lossteuert und dadurch in dem unregelmäßigen Ablauf der Zeit unterscheidende Merkmale setzt. Es ist daher nicht mehr verwunderlich, daß der Mensch, der Nachahmer seines Schöpfers, endlich die Kunst des mehrstimmigen Gesangs, die den Alten unbekannt war, entdeckt hat. Er wollte die fortlaufende Dauer der Weltzeit in einem kurzen Teil einer Stunde mit einer kunstvollen Symphonie mehrerer Stimmen spielen und das Wohlgefallen des göttlichen Werkmeisters an seinen Werken so weit wie möglich nachkosten in dem so lieblichen Wonnegefühl, das ihm diese Musik in der Nachahmung Gottes bereitet.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

Nachdem KEPLER so in wiederholtem Anlauf die große Vielfalt und Vollkommenheit der himmlischen Musik aufgedeckt hat, ist noch übrig, den letzten Schritt zu tun: Es gilt zu ergründen, wie es der Schöpfer eingerichtet hat, daß diese himmlische Symphonie so kunstvoll zum Erklingen kommt. Dies wird im 9. Kapitel in neunundvierzig Axiomen und Lehrsätzen auseinandergelegt, worin KEPLER zeigt, „daß die Exzentrizitäten bei den einzelnen Planeten ihren Ursprung in der Vorsorge für die Harmonien zwischen ihren Bewegungen haben". Ausgangspunkt ist die Überzeugung[31]),

> daß der Schöpfer, ... dieser himmlische Werkmeister höchstselber die harmonischen Proportionen, die sich aus den ebenen regulären Figuren ergeben, mit den fünf räumlichen regulären Figuren verbunden hat, um aus den beiden Figurenklassen ein einziges vollkommenstes Urbild des Himmels zu formen. Ein Urbild, in dem einerseits mittels der fünf räumlichen Figuren die Ideen der Sphären zum Ausdruck gelangten, die die sechs Gestirne herumführen, und andererseits mittels der Abkömmlinge der ebenen Figuren, der Harmonien ... die Maße der Exzentrizitäten der einzelnen Bahnen zum Zweck einer entsprechenden Regelung der Körperbewegungen enthalten sind. Aus diesen beiden Bestandteilen sollte ein einheitliches, ausgeglichenes System gemacht werden. ... Auf diese Weise sollten aus dem Urbild zugleich die Proportionen der Bahnen und ihrer Exzentrizitäten, aus der Größe der Bahnen aber und der Rauminhalte der Körper die einzelnen Umlaufszeiten [ein Hinweis auf das Dritte Keplersche Gesetz!] hervorgehen.

Damit hat KEPLER das selbstgestecke Ziel erreicht. Ihm war der Nachweis gelungen, daß das Urbild des Kosmos ein kunstvoll geknüpftes Netz von Harmonien ist, in einem die Vorstellungen der Alten weit übersteigenden Maß. Sind doch diese Harmonien nicht nur in einzelnen Abständen verkörpert, nein, sie treten in den Bewegungen der Planeten in ständig wechselnder Weise zusammen und erzeugen so, der polyphonen Musik der Neuzeit entsprechend, eine großartige Symphonie.

Und mehr noch. In seinen Darlegungen verknüpfte KEPLER noch ein letztes Mal die vier Zweige des Quadriviums zu jener in sich geschlossenen Einheit, zu jener unauflösbaren, sich in vierfacher Weise entfaltenden Lehre, die einst als Grundlage und Voraussetzung für letzte philosophische und wissenschaftliche Erkenntnis geschaffen worden war.

Indem sich aber schon zu KEPLERs Zeit die zentrale an die Natur gerichtete Frage von jener nach der metaphysisch-ontologischen Begründung weg verschob hin zu der nach der mathematischen Gesetzmäßigkeit von funktionalen Abläufen, wurde auch die zur Anwendung kommende Mathematik fortan ihres transzendenten Sinnes entleert. Der Bezug zur Musiktheorie wurde sinnlos; diese verselbständigte sich. Ebenso zerriß das zur Astronomie bestehende besonders enge Band.

Übrig blieb eine Mathematik, aus alten Bindungen befreit, auf sich selbst zurückverwiesen. Das neue Verständnis von Mathematik ist — um es mit einem Terminus der

[31]) [KEPLER 1619], S. 317.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

Theologie unserer Tage zu sagen – dasjenige einer entmythologisierten Mathematik. Als solche hat sie der modernen Naturwissenschaft seit KEPLER und GALILEI zu ungeahnten und unermeßlichen neuen Kenntnissen verholfen.

KEPLER war der letzte große Denker gewesen, der aus tiefster Überzeugung das alte Ideal noch einmal mit in der Mathematik selbst liegenden Gründen zu stützen versucht hatte. Mit GALILEI, dem wir uns jetzt zuwenden, beginnen „die zergliedernden Kräfte des Verstandes" eindeutig die Oberhand zu gewinnen.

4.2 Galileis Resonanztheorie

Galileo GALILEI (1564–1642) behandelte das Thema der Konsonanz und Dissonanz in seinen „Discorsi", den „Unterredungen und mathematischen Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend", die er gegen Ende seines Lebens (1638) in den Niederlanden veröffentlichte. In diesem Diskurs zwischen SAGREDO, SALVIATI und SIMPLICIO kündigt SALVIATI gegen Ende des 1.Tages an, er wolle auf Probleme der Akustik eingehen – „einen hochedlen Gegenstand, über welchen viel geschrieben worden ist, auch von ARISTOTELES selbst". SAGREDO antwortet:32)

> Das allbekannte Problem der zwei gleichgestimmten Saiten, demgemäss beim Erklingen der einen die andere sich auch bewegt und mitschwingt, ist mir noch nicht klar, auch verstehe ich nicht recht die Form der Consonanzen und Anderes.

Das Problem wird also sofort ganz nüchtern als ein rein physikalisches, genauer gesagt: als ein mechanisches gesehen und entsprechend angegangen; irgendwelche metaphysischen Fragestellungen werden überhaupt nicht aufgeworfen. Vielmehr beginnt SALVIATI unmittelbar, bestimmte Erscheinungen bei Pendelschwingungen zu diskutieren, um dann das Phänomen der Resonanz gleichartiger oder im Verhältnis von Oktave und Quinte gestimmter Saiten zu besprechen.33)

Wird, so führt SALVIATI = GALILEI aus, eine Saite in Schwingungen versetzt, so gerät die Luft in Mitbewegung und erregt ihrerseits andere, gleichgestimmte Saiten, da sie jeweils im passenden Moment einen zusätzlichen Impuls erteilt – so wie es ein Mann tut, der eine schwere Glocke zum Erklingen bringt, indem er ihre Schwingung immer im richtigen Augenblick verstärkt. Diese Lufterschütterungen treffen auf das Trommelfell des Menschen und lassen es im gleichen Tempo erzittern.

Ertönen gleichzeitig zwei Saiten, so erschüttern beide gleichzeitig das Trommelfell. Das kann in verschiedener Weise geschehen. Im ungünstigen Fall wird das Trommelfell von diesen Stößen ohne bestimmtes Verhältnis affiziert, so daß im Ohr unerträgliche Dissonanzen erzeugt werden. Der günstige Fall dagegen wird von SALVIATI mit folgenden Worten erläutert:34)

32) Zitiert nach [GALILEI 1638], S. 83.
33) [GALILEI 1638], S. 83–86.
34) [GALILEI 1638], S. 90.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

> Consonant und wohlklingend werden diejenigen Intervalle sein, deren Töne in einer gewissen Ordnung das Trommelfell erschüttern; wozu vor Allem gehört, dass die Schwingungszahlen in einem rationalen Verhältnisse stehen, damit die Knorpel des Trommelfelles nicht in steter Qual sich befinden, in verschiedenen Richtungen auszuweichen und den auseinandergehenden Schlägen zu gehorchen. Deshalb ist die erste und vollkommenste Consonanz die Octave, weil auf jede Erschütterung des tieferen Tones zwei des höheren kommen; so dass beide abwechselnd zusammenfallen und auseinandergehen; von allen Schwingungen fällt die eine Hälfte zusammen, während beim Einklang alle Erschütterungen zusammenfallen und wie von einer einzigen Saite herstammend sich verhalten und von keiner Consonanz mehr gesprochen werden kann. Die Quinte klingt auch sehr gut, weil auf je 2 Schwingungen der einen Saite die höhere 3 giebt, woraus folgt, dass von den Schwingungen des höheren Tones ein Drittel mit denen des anderen zusammenfällt; also zwei isolirte sind eingeschaltet; und bei der Quarte fallen je drei aus, und je die vierte fällt zusammen. Bei der Secunde trifft nur eine von 9 Schwinungen eine Schwingung des tieferen Tones, alle anderen weichen ab, daher empfindet man bereits eine Dissonanz.

In den folgenden Ausführungen wird noch deutlicher, daß GALILEI seiner Erklärung eine Stoßtheorie zugrundelegt (ähnlich wie sie auch von Isaac BEECKMANN (1588 bis 1637), basierend auf seiner Korpuskulartheorie, entwickelt worden war). Abgesehen davon, daß er sich vor allem um eine *physikalische* Erklärung bemüht, macht die Schlußbemerkung über die Sekunde aber noch etwas anderes deutlich: GALILEI sieht keine strikte Grenze mehr zwischen Konsonanzen auf der einen und Dissonanzen auf der anderen Seite. Vielmehr gibt es für ihn nur einen graduellen Unterschied, eine Stufenleiter, die vom hochgradig konsonanten Einklang über bessere und schlechtere Konsonanzen zu schwächeren und stärkeren Dissonanzen führt. Die traditionelle Dichotomie verliert sich in einem fließenden Übergang – eine Erscheinung, die sich in der Entwicklung der Naturwissenschaften ja vielfach wiederholte: die aristotelische Scheidung zwischen einem himmlischen und einem irdischen Bereich der Welt, zwischen warm und kalt, zwischen natürlicher und künstlicher Bewegung und viele andere grundsätzliche Trennungen dieser Art mußten im Laufe der Zeit graduellen Übergängen innerhalb der gleichen begrifflichen Kategorie weichen.

Doch noch in einer zweiten Hinsicht entzieht GALILEI der pythagoreischen Konsonanzenlehre ihre scheinbar so festgefügte Grundlage. Er läßt nämlich den Gesprächspartner SAGREDO Zweifel daran vortragen, daß die Oktave eindeutig durch das Verhältnis 2:1, die Quinte durch das Verhältnis 3:2 festgelegt sei. Denn nicht nur könne man den Ton einer Saite erhöhen durch Verkürzung der Saite (wobei die genannten Verhältnisse maßgebend sind), sondern auch durch Erhöhung der Spannung und schließlich durch Verdünnung, d.h. Verkleinern ihres Querschnittes.[35]) So sei z.B., um durch Erhöhung der Spannung die Oktave zu erzeugen, nicht die doppelte sondern die vier-

[35]) Die deutsche Übersetzung in Ostwald's Klassikern sagt fälschlich: durch ‚Unterstützung' für das italienische *assottigliare*.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

fache Kraft erforderlich. Und wolle man die Oktave dadurch hervorbringen, daß man die Saite verdünnt, so müsse ihre Dicke auf ein Viertel reduziert werden. Entsprechend ergebe sich bei der Quinte für die Erhöhung der Spannung das Verhältnis 9:4 und für die Reduzierung der Dicke das Verhältnis 4:9. Also sei man aufgrund der Versuche ebenso berechtigt, als kennzeichnendes Verhältnis für die Oktave nicht 2:1 sondern 4:1 anzugeben und für die Quinte nicht 3:2 sondern 9:4.[36])

Wo also die Pythagoreer und alle ihre Nachfolger nur auf *eine* kennzeichnende Erscheinung beim akustischen Phänomen der Tonerzeugung geschaut hatten – auf die Länge der Saite oder der Pfeife –, da untersuchte GALILEI die Abhängigkeit der Tonhöhe von verschiedenen Parametern und erkannte, daß die zugrundeliegenden mathematischen Gesetzmäßigkeiten keineswegs nur der einfachen (oder umgekehrten) Proportionalität genügten. Vielmehr treten bei dieser Erscheinung auch quadratische Funktionen auf. Damit sind die einfachen Verhältnisbeziehungen, die seit den Pythagoreern als das Wesentliche angesehen worden waren, ihrer Sonderstellung beraubt: es gibt weitere funktionale Abhängigkeiten, deren mathematische Formulierung komplizierter – der Physiker sagt: in nichtlinearer Form – ausfällt.

Man sieht: Weil sich die Pythagoreer bei der Mathematisierung der Musik auf einen einzigen Aspekt beschränkten, der zudem noch durch eine ganz einfache mathematische Gesetzmäßigkeit beschreibbar war, konnten sie in dieser zugleich eine ontologische Begründung für die Existenz von Konsonanzen sehen und darauf ihr großartiges Weltbild gemäß dem Postulat „Alles ist Zahl" errichten. Als aber deutlich wurde, daß es mehr als einen einzigen Aspekt dieses Naturphänomens gibt, der durch mathematische Beziehungen darstellbar ist, da hatten die Zahlen plötzlich ihre ontologische Kraft verloren. Sie waren nun nur noch nützliche Meß- und Rechengrößen – zwar hervorragend geeignet, vielfältige funktionale Beziehungen in Form einer genialen Kurzschrift wiederzugeben, aber nicht mehr fähig, das Wesen einer Naturerscheinung zu erklären.

Mit GALILEI setzt auch die systematische Erforschung der Schwingungsvorgänge ein. Sie führte im 18. Jahrhundert zur Theorie der Dynamik, insbesondere auch zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen und damit zur Begründung eines wesentlichen Teiles der mathematischen Physik. Doch muß ich diesen Aspekt der Untersuchung harmonischer Erscheinungen heute vollständig ausklammern.[37])

5 Das 18. und 19. Jahrhundert

5.1 Die Konsonanzgradberechnung Eulers

a) Den ersten konsequenten Versuch, auch die subjektive Seite der Musik, d.h. die Empfindung der Konsonanz oder Dissonanz eines Intervalles oder Klanges, der Mathematisierung zu unterwerfen, unternahm meines Wissens Leonhard EULER (1707 bis

[36]) [GALILEI 1638], S. 87–88.
[37]) Vgl. hierzu: [CANNON-DOSTROVSKY 1981].

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

1783) im „Tentamen novae theoriae musicae" von 1739.[38]) EULER sah – wie inzwischen wohl die Mehrzahl der Zeitgenossen – Konsonanz und Dissonanz nicht mehr als absolute Gegensätze, sondern als nur graduell verschiedene Empfindungen der gleichen Gattung, als fließende Übergänge also, deren Stärke quantitativ erfaßbar sein müsse. Folglich suchte er nach einer Funktion zur Messung des Konsonanzgrades der „suavites", der Lieblichkeit einer Harmonie.

Wie EULER seine Funktion aufstellt – die naturgemäß jedem Zahlenverhältnis einen Wert zuordnen muß und auf diese Weise zu einer Klassifikation der Zusammenklänge von zwei oder mehreren Tönen führt –, kann ich hier nicht ausführen.[39]) Auch EULER legt den akustischen Erscheinungen eine Pulstheorie zugrunde, wie sie uns bereits bei GALILEI begegnet war: Bei der Quinte kommen auf zwei Stöße des unteren drei des oberen Tones, usw.

Es sei hier lediglich in Form einer Tabelle angegeben, wie die einfachsten Akkorde durch EULERs Gradusfunktion in ein System gebracht werden:

Grad der Klasse	Proportionen
1	1:1
2	2:1
3	3:1, 4:1, 4:2:1
4	3:2, 6:1, 8:1, 3:2:1, 6:3:2, 6:2:1, 8:2:1, 6:3:1, 6:3:2:1, 8:4:2:1
5	4:3 usw.

Man erkennt daran z.B., daß die Duodezime (3:1), d.h. die Quinte über der Oktave, den Grad 3 zugeteilt bekommt, die Quinte selbst aber den Grad 4. Auch werden zu viele Klänge, die subjektiv als sehr verschieden empfunden werden, mit demselben Konsonanzgrad belegt. Das macht deutlich, weshalb die Praktiker sich mit EULERs Konsonanzgradberechnung nicht anfreunden konnten.

Dennoch war hier erstmals die Mathematik auf einen Aspekt der musikalischen Empfindung angewandt worden, die bis dahin lediglich in qualitativer Form beschrieben werden konnte. Im 20. Jahrhundert hat es Versuche gegeben, den EULERschen Ansatz weiterzuentwickeln. Zu nennen sind in diesem Zusammenhang u.a. der Komponist Paul HINDEMITH (1895–1963), der in seiner „Unterweisung im Tonsatz" (1937–1939) eine (unvollständige) Klassifikation der Akkorde gab, und der vor zwei Jahren verstorbene Hamburger Mathematiker Egmont KÖHLER (1933–1988), der einen systematischeren und mathematisch anspruchsvolleren Ansatz machte.[40])

b) Auch in bezug auf die Konstruktion der Tonleiter verdankt man Leonhard EULER einen neuen Ansatz. Indem er nämlich auf diese Problematik die Kettenbruchmethode anwandte, konnte er zeigen, daß neben der üblichen Stimmung, die ja

[38]) Vgl. [EULER 1739]: Opera omnia (3) 1, Kap. 2 ff., [BUSCH 1970], S. 29 ff. und [FELLMANN 1983].

[39]) Vgl. außer der genannten Literatur auch [SCRIBA 1990].

[40]) Vgl. [HINDEMITH 1937] und [KÖHLER 1986].

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

zwölf Halbtöne in der Oktave enthält, bestimmte weitere, feinere Unterteilungen sinnvoll sein können. Eine davon fügt in die Oktave 31 kleine Tonschritte ein. Schon um die Mitte des 16. Jahrhunderts hatte Nicolas VICENTINO ein sechsmanualiges Archicembalo beschrieben, worin er die Oktave in 31 möglichst gleiche Schritte unterteilt hatte. Eine erste mathematische Begründung war von Christiaan HUYGENS gegeben worden.[41])

Im 20. Jahrhundert verwirklichte der niederländische Physiker A.D. FOKKER (1887–1972) die Unterteilung der Oktave in 31 Fünfteltonschritte.[42]) Eine nach seinen Prinzipien gefertigte Orgel befindet sich heute in Teylers Museum in Haarlem. Für die musikalische Praxis blieben freilich alle diese Verfeinerungen ohne Bedeutung.

5.2 Helmholtz' Lehre von den Tonempfindungen

Den wichtigsten Fortschritt in der naturwissenschaftlichen Untersuchung musikalischer Phänomene, den das 19. Jahrhundert erzielte, machte wohl der Mathematiker, Physiker und Physiologe Hermann von HELMHOLTZ (1821–1894). Seine 1863 erstmals veröffentlichte „Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik" begründete die moderne musikalisch-akustische Forschung. Indem er nicht nur die Grundtöne, sondern auch die mit diesen zugleich erklingenden Obertöne in seine Theorie mit einbezog, gelangte HELMHOLTZ zu einer neuen Definition der Konsonanz: zwei Töne erklingen als Konsonanz, wenn nicht nur die Grundtöne, sondern auch die dazugehörigen Obertöne schwebungsfrei zusammenklingen. (Das Beachten der Schwebungen zwischen benachbarten Tönen war bereits 1744 von Andreas SORGE (1703–1788) als Hilfsmittel beim Stimmen von Orgeln empfohlen worden.)[43])

Sieht man auf die Einzelheiten, so sind es nicht einmal überwältigend neue Anwendungen der Mathematik, die HELMHOLTZ in seinen Untersuchungen vornimmt. Aber die Tatsache, daß er das Phänomen der Musik und Harmonie in so umfassender Weise zum Gegenstand naturwissenschaftlicher Forschungen machte und damit diesen Gegenstand nicht allein den geisteswissenschaftlich orientierten Musikwissenschaften und Musikhistorikern überließ, wies den Weg in eine neue Richtung.

6 Das 20. Jahrhundert

6.1 Graesers Analyse der „Kunst der Fuge"

Die Versuche, musikalische Formen mit mathematischen Hilfsmitteln zu untersuchen, sind offenbar sehr jungen Datums. Man kann den Beginn in Wolfgang GRAESERs (1906–1928) Studien über Johann Sebastian BACHs „Kunst der Fuge" sehen,

[41]) Vgl. [HUYGENS 1691a], [HUYGENS 1691b] und [COHEN 1980].
[42]) [FOKKER 1944], [FOKKER 1975].
[43]) Vgl. [HELMHOLTZ 1857], Nachwort von Fritz KRAFFT, S. 60.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

1924 im Bach-Jahrbuch veröffentlicht.[44]) Auf dem Salzburger Musikgespräch 1984 bezeichnete Rudolf WILLE diesen Aufsatz des 17jährigen Abiturienten GRAESER als „eine erste Zusammenschau von Musiktheorie und moderner Mathematik".[45])

Es ist sicher kein Zufall, daß gerade an dieser Komposition die Kraft mathematischer Analyse erstmals erprobt wurde. Sie gilt ja als Johann Sebastian BACHs Testament und besteht aus 19 Fugen, die BACH in seinen letzten Lebensjahren ausarbeitete. Die letzte Fuge blieb bekanntlich unvollendet; der auf dem Totenbett diktierte Choral „Vor Deinen Thron tret' ich hiermit" beschließt das gewaltige Werk.

Da BACH die endgültige Anordnung der einzelnen Teile der Komposition nicht mehr selbst vornehmen konnte, war nach seinem Tode unbekannt, wie er sich den Gesamtaufbau vorgestellt hatte. Als sich Wolfgang GRAESER zu Beginn der Zwanziger Jahre um eine Neuordnung der 19 Fugen zu einem geschlossenen Gesamtkunstwerk bemühte, tat er es in der Überzeugug, allein die in den Fugen verborgenen Symmetrieeigenschaften könnten ihm den Schlüssel liefern für den vom Komponisten intendierten kunstvollen Aufbau des Werkes. Die damaligen Methoden der Musikwissenschaft hielt er nicht für ausreichend, um dieses musikalische Formenproblem zufriedenstellend zu lösen.

GRAESER lieh sich die Untersuchungsmethoden von der Mathematik, genauer gesagt, von der Gruppentheorie. Wie er das tat, sei kurz angedeutet. Als Elemente der Musik sah er Töne, Linien und Harmonien an; letztere sah er als Mengen von Tönen an. Er stellte eine Analogie zur Geometrie her, deren Gebilde aus Punkten aufgebaut sind. Ihr wichtigstes Grundprinzip sei die durch Transformationen erzeugte Symmetrie. In der Musik findet sie sich am vollkommensten in der kontrapunktischen Form.

GRAESER denkt sich die Gruppenoperationen (Spiegelungen, Umkehrungen, Dehnungen usw.) sowohl auf die einzelnen Tonschritte wie auf die Tonfolgen (Themen) angewendet, sagt er doch: „Offenbar bilden auch die Transformationen eines festen Tonkörpers eine Gruppe".

Aus Thema, Spiegelung und Umkehrung destilliert er ein gemeinsames Schema, das schließlich auf das zugrunde liegende Skelett reduziert wird: Tonika – verminderter Septimakkord – Tonika (siehe Abb. 11).

Auch diese Reduktion des Tonmaterials der 19 Fugen auf das wesentliche harmonische Skelett ist mathematisch nicht voll ausformuliert.

Ein neuer Ansatz wird durch die Verwendung der kleinen Buchstaben a, b, c, d für die thematischen Einsätze in den Stimmen Sopran, Alt, Tenor und Baß gemacht. Zeitlich vergrößerte Einsätze werden durch große, zeitlich verkürzte durch kleinere Buchstaben dargestellt. Einsätze in einer anderen als der für die betreffende Fuge geltenden Hauptform erscheinen in Kursivschrift, inverse Themen und ihre Varianten werden durch die Kehrwertbezeichnungen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ usw. gekennzeichnet, Versetzungen durch gestrichene bzw. doppeltgestrichene Buchstaben a', b' (bzw. a'', b'' usw.). Für Nebenthemen verwendet GRAESER griechische Buchstaben, für deren Einsätze Indizes.

[44]) [GRAESER 1924].
[45]) [WILLE 1985], S. 4.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

Das ermöglichte ihm, den Aufbau der einzelnen Fugen in sehr übersichtlicher und komprimierter Form wiederzugeben. Ein Beispiel zeigt Abb. 12.

Schließlich sei noch das letzte Element aus GRAESERs mathematischem Methodenvorrat angeführt. Indem er die normale und die inverse Form durch einen nach oben bzw. nach unten geöffneten Bogen repräsentierte, veranschaulichte er für den Contrapunctus *V* die – der traditionellen Regel widersprechende – symmetrische Verteilung der Themen (siehe Abb. 13). Wen erinnert das nicht an Christian MORGENSTERNs „Fisches Nachtgesang"?[46])

Abb. 11:
Die Reduktion von Thema, Spiegelung und Umkehrung von BACHs „Kunst der Fuge" auf das Grundskelett durch Wolfgang GRAESER.

[46]) Zitiert in Christian MORGENSTERN: Alle Galgenlieder. Insel-Verlag Wiesbaden 1950, S. 31.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

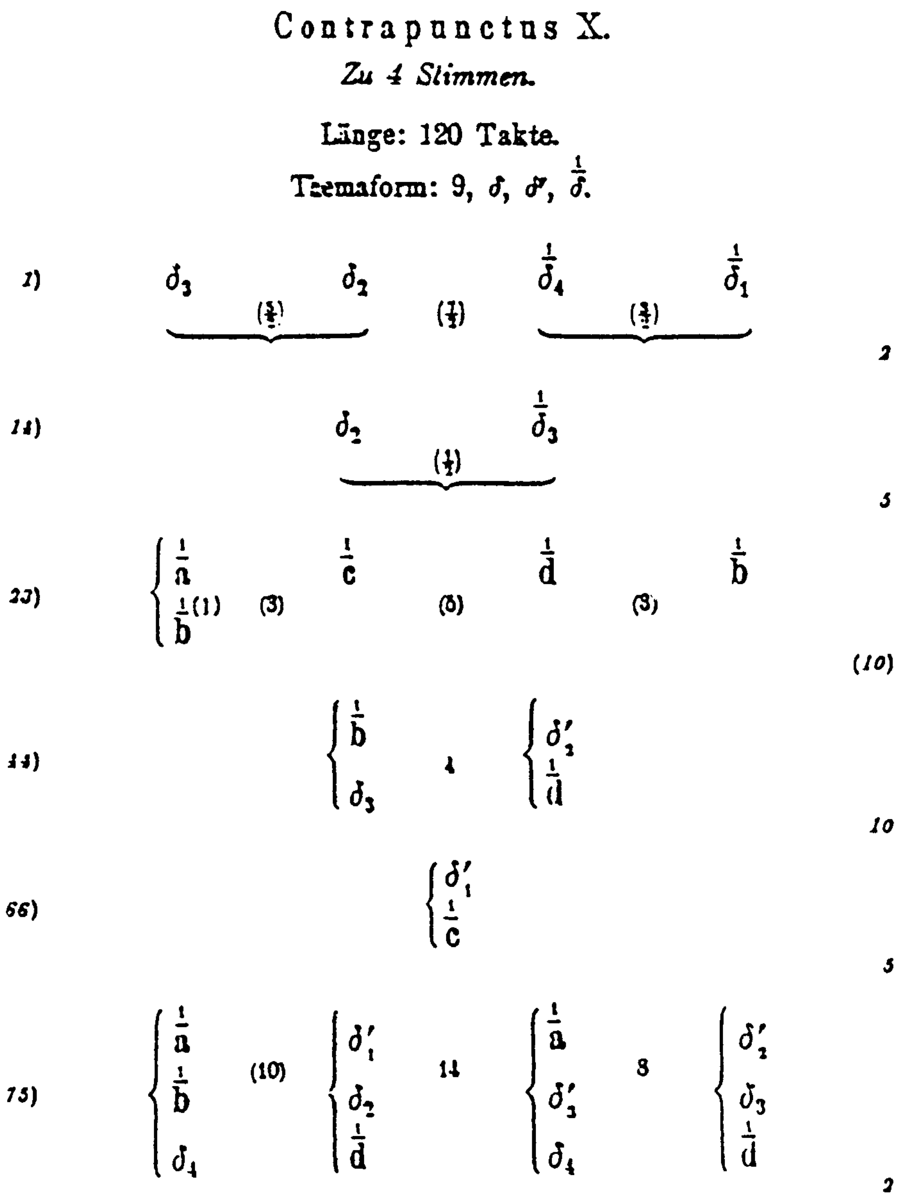

Abb. 12:
GRAESERs Darstellung des Contrapunctus X.

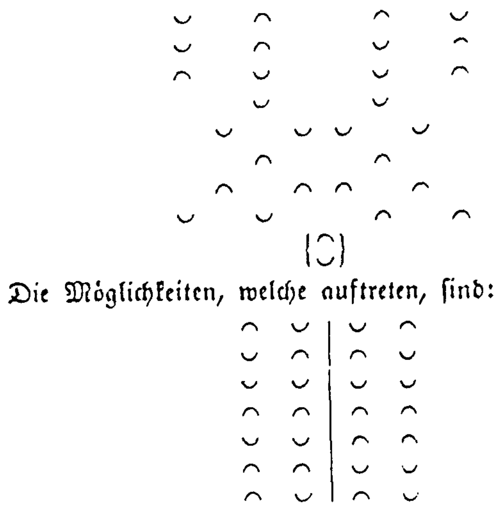

Abb. 13:
GRAESERs Darstellung des Contrapunctus V.

Es dürfte klar geworden sein, daß es sich bei GRAESERs Analyse nicht um die Neuentwicklung einer mathematischen Theorie zum Zwecke der Anwendung auf musikalische Strukturen handelte, sondern um einen ersten Versuch, einige zeitgenössische Begriffe der Mathematik, genauer der Gruppentheorie für die Untersuchung der musikalischen Formensprache heranzuziehen.

Sieht man auch heute GRAESERs Neuordnung der „Kunst der Fuge" nicht mehr als die einzig mögliche an, so bleibt doch sein unvergängliches Verdienst, darauf hingewiesen zu haben, daß sich auch musikalische Strukturen, Kompositionsformen, mit mathematischen Hilfsmitteln untersuchen lassen.

6.2 Weitere Entwicklungen im 20. Jahrhundert

Seit GRAESERs Untersuchung sind über 60 Jahre vergangen. Es scheint aber, als hätte sein Anstoß nicht unmittelbar gewirkt. Vielmehr bedurfte es erst einer erneuten Anregung, bevor sich die Mathematiker intensiver der Untersuchung musikalischer Formprobleme annahmen. Diese Anregung geschah durch die Entwicklung elektronischer Rechenanlagen seit der Mitte unseres Jahrhunderts. Dadurch wurde es in bislang ungeahnter Weise möglich, das Komponieren einer Maschine zu übertragen, wenn man ihr nur zuvor die entsprechenden Kompositionsregeln eingegeben hatte. Dies aber zwang zur Beschäftigung mit der Frage, wie solche Regeln mathematisch zu beschreiben sind. Zugleich ergab sich damit die Möglichkeit, historische Kompositionen auf ihre Formstrukturen hin zu untersuchen – nicht mehr nur mit den traditionellen Methoden der Musikwissenschaft, sondern ebenfalls durch den Einsatz von entspre-

Digitale Bibliothek Braunschweig

chend programmierten Computern. Über die verschiedenen Ansätze mathematischer Analysen von Musikstrukturen berichteten die Teilnehmer am Salzburger Musikgespräch 1984.[47])

Hier sei abschließend noch hingewiesen auf das vor einigen Jahren erschienene Buch von Guerino MAZZOLA[48]) sowie auf eine Vorlesung des Hamburger Mathematikers Egmont KÖHLER (1933–1988)[49]) vom Wintersemester 1985/86, worin dieser einen andersartigen Zugang zu solchen Analysen darlegte. Aus einer Klassifizierung von Akkorden wie von Rhythmen gewann er ein Maß für die Komplexität einer musikalischen Komposition, das sich in Form einer Graphik veranschaulichen läßt. Zwei Beispiele zeigt Abb. 14.

Bei all diesen Anwendungen von Mathematik auf Musik kann es weder darum gehen, den Komponisten in seiner schöpferischen Freiheit einzuschränken, noch darum, die Methoden der traditionellen Musikwissenschaft zu diskreditieren. Ähnlich, wie in der Kunstwissenschaft in den letzten Jahren die herkömmlichen Methoden ergänzt wurden durch die Möglichkeiten der physikalisch-chemischen Untersuchung von Leinwand, Holzhintergrund und verwendeten Farben, so bieten bei der Untersuchung von musikalischen Kompositionen die neuen mathematischen Verfahren zusätzliche Hilfsmittel an. Sie können beispielsweise helfen bei der Analyse eines neu aufgefundenen anonymen Musikstückes mit dem Ziel, den Komponisten zu ermitteln. Jeder Künstler besitzt seine eigene, unverwechselbare Sprache (das gilt für den Dichter ebenso wie für den Maler, den Bildhauer oder den Tonkünstler), die zwar entwicklungsfähig ist, aber zugleich auch je charakteristische Besonderheiten aufweist. Die mathematische Analyse – vorausgesetzt, ihre Methoden sind genügend weit entwickelt –, kann dazu beitragen, diese Charakteristika herauszuarbeiten. Sie kann eine Art Raster erstellen und mit dessen Hilfe es zumindest wahrscheinlich (oder unwahrscheinlich) machen, daß eine Komposition einem bestimmten Komponisten zugeordnet werden darf oder nicht. Vielleicht kann sie auch noch einen Schritt weiter gehen: Ist ein solches Raster (als die Summe der von einem Komponisten verwendeten Regeln und Besonderheiten ihrer Behandlung) weit genug ausgebaut, könnte man es als Komponiervorschrift einem Computer eingeben und zusehen, was dieser damit anzufangen vermag. Da Regeln allein nie die intuitive, schöpferische Kraft des Komponisten ersetzen können, kann der geschulte Hörer dann feststellen, wo die Grenzen der mathematischen Erfaßbarkeit musikalischer Kreativität liegen.

7 Schlußbemerkungen

Ich bin am Ende dieses notwendigerweise skizzenhaften Überblicks über das Verhältnis von Mathematik und Musik in der Geschichte angekommen. Am Anfang stand die überwältigende Erkenntnis der Pythagoreer, daß musikalische Harmonien durch das Zahlenverhältnis kleiner ganzer Zahlen bestimmt sind, worauf sie den Zahlbegriff

47) Vgl. [WILLE 1985].
48) [MAZZOLA 1985].
49) [KÖHLER 1986].

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

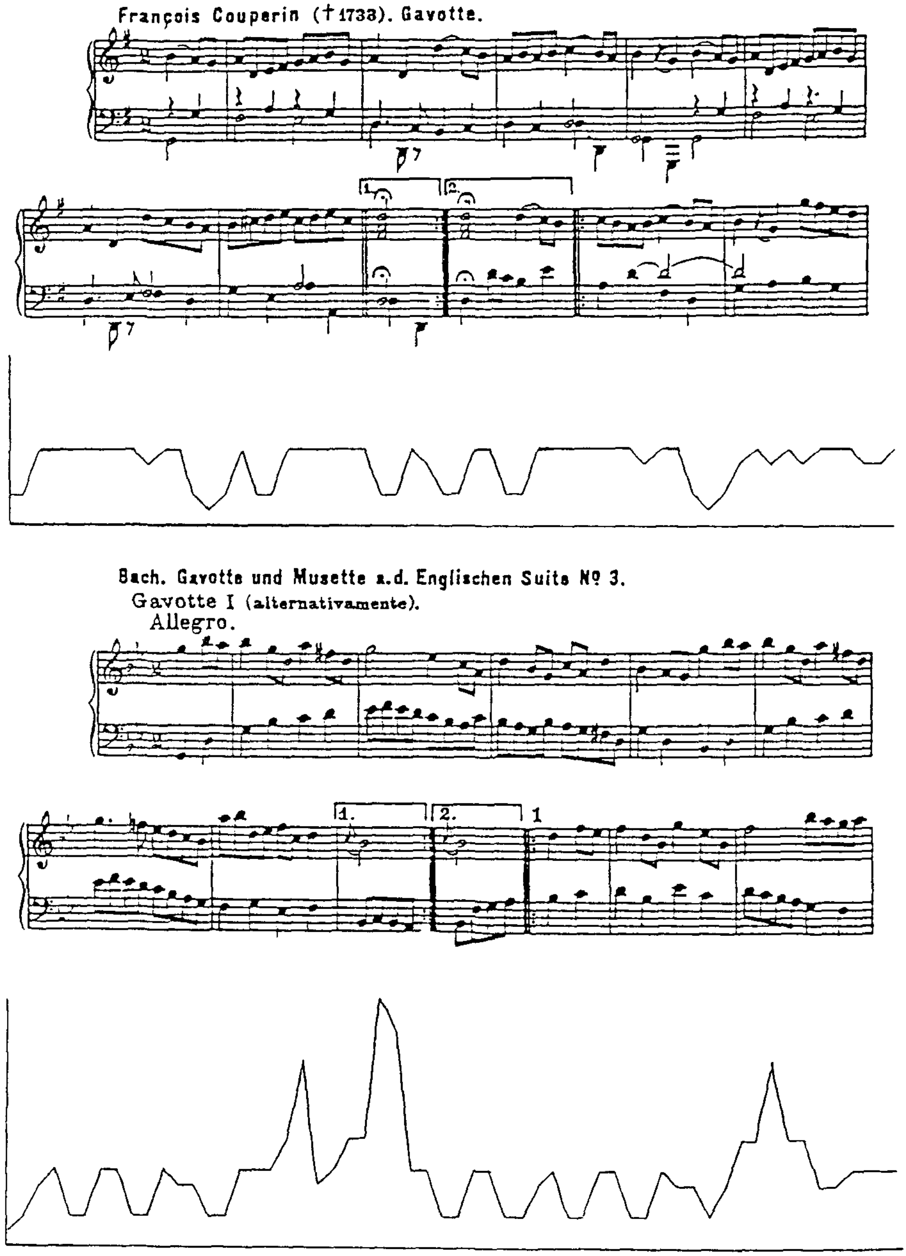

Abb. 14:
Egmont KÖHLERs graphische Darstellung der Komplexität einer Gavotte von F. COUPERIN und einer Gavotte von J.S. BACH.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

ontologisch-metaphysisch überhöhten und auf ihn ihr ganzes Weltbild gründeten. Von PLATON im „Timaios" zu einem höchst kunstvollen Schöpfungsmythos verarbeitet, wirkte der Gedanke eines harmonisch geordneten, aufeinander bezogenen Mikro- und Makrokosmos über das Mittelalter hinweg bis in die Neuzeit.

Von der arithmetischen Fundierung dieser Vorstellungen gingen, trotz der Notwendigkeit einer gewissen Erweiterung, auch die Musiktheoretiker der Renaissance nicht ab; nur KEPLER suchte die geistigen Urbilder nicht mehr in der Welt der Zahlen, sondern in den geometrischen Konstruktionen. Er steht in doppelter Weise an der Wende: einerseits ist er der letzte große Pythagoreer, der glaubt, in der Mathematik selbst die metaphysische Begründung für die Weltharmonik finden zu können; andererseits gehört er als messender und rechnender Astronom der neuzeitlichen Wissenschaft an, der die sorgfältigste Erfassung und Berechnung der quantitativen Daten zur obersten Richtschnur wird und die daher in der Mathematik bloß noch ein nüchternes Arbeitsinstrument sieht.

Dieses Arbeitsinstrument wird fortan auf immer neue Aspekte der Musik angewendet: auf die physikalischen Schwingungsvorgänge, auf die subjektiven Empfindungen der Konsonanzen und Dissonanzen, auf die rhythmische Gestaltung von Kompositionen und auf die Formstrukturen der Musik. Und auch, wenn es sich dabei nur um eine nüchterne, handwerksmäßige Anwendung von Mathematik handelt, so werden doch noch immer die meisten Mathematiker sich jenes Wort zu eigen machen, das ich meinem Thema vorangestellt habe:[50]) „Ein eigentümlicher Zauber umgibt das Erkennen von Maß und Harmonie."

[50]) Dieses Zitat wurde von der Deutschen Bundesbank in ihren Anzeigen für den neuen 10 DM-Schein verwendet, ohne daß man mir auf Anfrage die Quelle nennen konnte. Herrn Dipl.-Ing. H. MICHLING (Gleichen-Bremke) und Herrn Prof. Dr. H. H. VOIGT (Göttingen) danke ich für den Hinweis auf die GAUSS-Biographie von Erich WORBS: *Sohn Carl Friedrich Gauss. Ein Lebensbild.* 2. A. Leipzig 1955. Darin ist als Motto zum Kapitel „Geheimnisse um die Magnetnadel" auf S. 95 das vollständigere Zitat „Ein eigentümlicher Zauber umgibt das Erkessen von Maß und Harmonie im anscheinend Regellosen" abgedruckt mit der Quellenangabe: *Gauß an A. v. Humboldt.* In Wahrheit steht das Zitat aber in einem Brief Alexander VON HUMBOLDTs an GAUSS vom 27. Juli 1837, wobei HUMBOLDT freilich GAUSS zitierte. Denn er bedankte sich hier für den ersten Band der von Carl Friedrich GAUSS und Wilhelm WEBER herausgegebenen *Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins* (Göttingen 1837), indem er eine von GAUSS in der Einleitung verwendete Formulierung aufgriff. HUMBOLDT schrieb: „Das Auge ruht mit einem besonderen Genusse auf diesen Tafeln, denn, wie Sie so schön und beredt sagen, »ein eigenthümlicher Zauber umgibt das Erkennen von Maß und Harmonie im anscheinend Regellosen«". (Dieser Satz HUMBOLDTs ist hier wiedergegeben nach der von Kurt-R. BIERMANN besorgten Neuausgabe: *Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauss* (= Beiträge zur Alexander-von-Humboldt-Forschung, Bd. 4). Akademie-Verlag Berlin 1977, S. 58. Die Originalstelle aus den „Resultaten" ist dort in Anm. 5 auf S. 59 identifiziert.) – In Carl Friedrich GAUSS: *Werke*, 5. Bd., Zweiter Abdruck, Göttingen 1877, S. 350–351 findet sich die fragliche GAUSS-sche Passage in leicht veränderter Orthographie und erweitert um das Wort „ganz" (ich zitiere den vollständigen Satz): „Das Aufsuchen der Gesetze in den Naturerscheinungen hat für den Naturforscher seinen Zweck und seinen Werth schon in sich selbst, und ein eigenthümlicher Zauber umgibt das Erkennen von Maass und Harmonie im anscheinend ganz Regellosen."

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

Lassen Sie mich schließen mit einem noch sehr jungen Produkt dieser „entmythologisierten“ Mathematik und ihres Ablegers, der elektronischen Rechenmaschinen. Man kann heute die sich in Jahrtausenden vollziehenden Bewegungsabläufe unseres Sonnensystems im Computer simulieren und auf die Dauer von Stunden oder gar Minuten zusammendrängen. Ja, man kann mit Hilfe einiger Kunstgriffe die bisher der Menschheit unzugänglich gebliebene Sphärenmusik hörbar machen, wovon ich Ihnen ein kleines Beispiel vorführen möchte.

Es handelt sich um Auszüge aus einer Schallplatte „The Harmony of the World“, auf der die beiden Professoren Willie RUFF und John ROGERS von der *Yale University* die Daten aus KEPLERs „Weltharmonik“ in Musik umgesetzt haben.[51])

Literatur

[BARBOUR 1951]
BARBOUR, J. MURRAY: Tuning and Temperament. A Historical Survey. East Lansing, Michigan 1951; Nachdruck New York 1972.

[BECKER 1957]
BECKER, OSKAR: Frühgriechische Mathematik und Musiklehre. Archiv für Musikwissenschaft 14 (1957), 156–164.

[BUSCH 1970]
BUSCH, HERMANN RICHARD: Leonhard Eulers Beitrag zur Musiktheorie. Regensburg 1970.

[CANNON-DOSTROVSKY 1981]
CANNON, JOHN T., DOSTROVSKY, SIGALIA: The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742 (= Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 6). New York, Heidelberg, Berlin 1981.

[COHEN 1980]
COHEN, H. FLORIS: Huygens on Consonance and the Division of the Octave. In: Studies on Christiaan Huygens, ed. by H.J.M. BOS et. al. Lisse 1980, S. 271–301.

[COHEN 1984]
COHEN, H. FLORIS: Quantifying Music. The Science of Music at the First Stage of the Scientific Revolution, 1580–1650. Dordrecht, Boston, Lancaster 1984.

[DICKREITER 1973]
DICKREITER, MICHAEL: Der Musiktheoretiker Johannes Kepler. Bern, München 1973.

[DIELS-KRANZ 1960]
Die Fragmente der Vorsokratiker. Griechisch und deutsch von HERMANN DIELS. Neunte Auflage hrsg. von WALTER KRANZ. 1. Bd. Berlin 1960.

[DUPONT 1935]
DUPONT, W.: Geschichte der musikalischen Temperatur (Diss. Nürnberg). Nördlingen 1935.

[51]) Die Platte wurde mit einem IBM 360/91 Computer im Computer Center der Princeton University im Jahre 1979 aufgenommen. Sie trägt die Nummer LP 1571 (– KEPLERs Geburtsjahr!), ohne weiteres Markenzeichen. Ein erläuternder Artikel von John ROGERS und Willie RUFF: „Kepler's Harmony of the World: A Realization for the Ear“ erschien im *American Scientist* 67, no. 3, May-June 1979, 286–292. Dort wird mitgeteilt, Anfragen seien an Prof. Ruff, School of Music, Yale University New Haven, CT 06520, USA zu richten.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

[EULER 1739]
EULER, LEONHARD: Tentamen novae theoriae musicae. St. Petersburg 1739. Wiederabdruck in Leonhard Euler: Opera omnia (3) 1, Leipzig, Berlin 1926, S. 197–427.

[FELLMANN 1983]
FELLMANN, EMIL A.: Leonhard Euler – Ein Essay über Leben und Werk. In: Leonhard Euler 1707–1783. Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel-Stadt. Basel 1983, S. 13–98; darin insbes. Abschnitt 12 „Musik" (S. 73–80).

[FOKKER 1944]
FOKKER, ADRIAAN DANIEL: Rekenkundige Bespiegelung der Muziek. Gorinchem 1944.

[FOKKER 1975]
FOKKER, ADRIAAN DANIEL: New Music with 31 Notes. Bonn-Bad Godesberg 1975.

[GALILEI 1638]
GALILEI, GALILEO: Discorsi e dimostrazioni matematiche, Leiden 1638. Dt. Ausgabe: Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend. Aus dem Italienischen übersetzt und herausgegeben von ARTHUR VON OETTINGEN (= Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 11, Leipzig 1890, Nr. 24 und 25, Leipzig 1891, Nachdruck Darmstadt 1973. (Zitiert wird nach dem 3. unveränderten Nachdruck [4. Auflage] Leipzig 1917.)

[GRAESER 1924]
GRAESER, WOLFGANG: Bachs „Kunst der Fuge". Bach-Jahrbuch 1924, S. 1–104.

[HELMHOLTZ 1857]
VON HELMHOLTZ, HERMANN: Über die physiologischen Ursachen der musikalischen Harmonien. Mit einem wissenschaftshistorischen Nachwort herausgegeben von FRITZ KRAFFT. München 1971.

[HELMHOLTZ 1863]
VON HELMHOLTZ, HERMANN: Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. Braunschweig 1863, 6. Aufl. 1913.

[HINDEMITH 1937]
HINDEMITH, PAUL: Unterweisung im Tonsatz. 2 Bde. Mainz 1937–1939.

[HUYGENS 1691a]
HUYGENS, CHRISTIAAN: Brief an H. BASNAGE DE BEAUVAL [Oktober 1691], in: Œuvres Complètes, Bd. 10, La Haye 1905, S. 169–174.

[HUYGENS 1691b]
HUYGENS, CHRISTIAAN: Le (nouveau) cycle harmonique [verschiedene Stücke zur 31-tönigen Stimmung]. In: Œuvres Complètes, Bd. 20, La Haye 1940, S. 139–173.

[KEPLER 1596]
KEPLER, JOHANNES: Prodromus Dissertationum Cosmographicarum, continens Mysterium Cosmographicum. Tübingen 1596. Dt. Ausgabe: Mysterium Cosmographicum. Das Weltgeheimnis. Übersetzt und eingeleitet von MAX CASPAR. Augsburg 1923.

[KEPLER 1619]
KEPLER, JOHANNES: Harmonices Mundi Libri V. Linz 1619. Dt. Ausgabe: Weltharmonik. Übersetzt und eingeleitet von MAX CASPAR. München, Berlin 1939.

[KLIBANSKY 1936]
KLIBANSKY, RAYMOND: The Philosophic Character of History. In: Philosophy and History. Essays presented to ERNST CASSIRER. Edited by RAYMOND KLIBANSKY and H.J. PATON. Oxford 1936, S. 323–337.

[KÖHLER 1986]
KÖHLER, EGMONT: Zur Klassifikation und Komplexität von Akkorden. Manuskript nach einer im Wintersemester 1985/86 gehaltenen Vorlesung. Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 12, Heft 2 (1991), S. 363–394.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309

Digitale Bibliothek Braunschweig

[KRAFFT 1971]
KRAFFT, FRITZ: Geschichte der Naturwissenschaft I. Die Begründung einer Wissenschaft von der Natur durch die Griechen. Freiburg 1971.
[MAZZOLA 1985]
MAZZOLA, GUERINO: Gruppen und Kategorien in der Musik. Berlin (West) 1985.
[PLATON 1]
PLATON: Der Staat. In: PLATON: Sämtliche Werke. 2. Bd., 5. Aufl. Köln und Olten 1967, S. 5–407.
[PLATON 2]
PLATON: Timaios. In: PLATON: Sämtliche Werke. 3. Bd., 5. Aufl. Köln und Olten 1967, S. 91–191.
[RADBRUCH 1989]
RADBRUCH, KNUT: Mathematik in den Geisteswissenschaften. Göttingen 1989. Kap. 5: Musik und Mathematik.
[SCRIBA 1990]
SCRIBA, CHRISTOPH J.: Matematik og musik. [Übersetzung ins Dänische von JESPER LÜTZEN] normat (= Nordisk Matematisk Tidskrift) 38 (1990), 3–17.
[SZABÓ 1969]
SZABÓ, ÅRPAD: Anfänge der griechischen Mathematik. München, Wien 1969.
[v. d. WAERDEN 1979]
VAN DER WAERDEN, BARTEL L.: Die Pythagoreer. Zürich, München 1979.
[WALKER 1987]
WALKER, DANIEL P.: Keplers Himmelsmusik. In: ZAMINER, FRIEDER (Hrsg.): Geschichte der Musiktheorie, Bd. 6. Darmstadt 1987, S. 81–107.
[WILLE 1985]
WILLE, RUDOLF: Musiktheorie und Mathematik. In: GÖTZE, HEINZ und WILLE, RUDOLF (Hrsg.): Musik und Mathematik. Salzburger Musikgespräch 1984 unter Vorsitz von Herbert von Karajan. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1985, S. 4–31.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00054309